Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania domowe, seria 5.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **23 IV 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Niech

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1 + e^x}.$$

Wyznaczyć dziedzinę funkcji f, zbiór jej punktów ciągłości oraz zbiór jej punktów różniczkowalności.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^{\sqrt{n}}$ oraz ciągłość jego sumy jako funkcji x.

Zadanie 3. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$. Czy wynika stąd zbieżność jednostajna szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x f_n(x)$?

Zadanie 4. Zbadać, w jakich punktach $x \in \mathbb{R}$ różniczkowalna jest funkcja:

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞ i spełnia $f(0) = f'(0)$. Wykazać, że funkcja

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)$$

jest dobrze określona i klasy C^∞ na $\mathbb{R}$. Czy teza jest prawdziwa bez założenia $f'(0) = 0$?