Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania domowe, seria 4.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **16 IV 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji f_n dla podanych zbiorów A:

(a) $f_n(x) = (x^n - \sin x^n)^{1/n}$, $A = [0, 1]$ oraz $A = [c, 1]$ dla $c > 0$

(b) $f_n(x) = n(\sqrt{x + n^{-3/2}} - \sqrt{x})$, $A = (0, \infty)$

Zadanie 2. Dla funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ określamy $f_n(x) = \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$, gdzie $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

Zadanie 3. Rozpatrzmy ciąg wielomianów P_n określonych rekurencyjnie – przyjmujemy $P_0(x) = 0$ oraz $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)$ dla $n \geqslant 0$. Wykazać, że ciąg P_n jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$ do funkcji $f(x) = \sqrt{x}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że dla $f_n, g_n, f, g : A \to \mathbb{R}$ zachodzi $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$. Wykazać, że wówczas $f_n \cdot g_n \rightrightarrows f \cdot g$, o ile f i g są funkcjami ograniczonymi. Podać przykład, że zbieżność może nie mieć miejsca, jeśli f lub g jest nieograniczona.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji f_n dla podanych zbiorów A:

(a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $A = \mathbb{R}$

(b) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $A = [-1, 1]$