Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania domowe, seria 3.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach w środę **27 III 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Załóżmy, że funkcja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i oznaczmy

$$M_k = \sup \left\{ |f^{(k)}(x)| : \, x \in (0, \infty) \right\}, k = 0, 1, 2.$$

Wykazać nierówność $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$. *Uwaga:* zakładamy, że $M_k < \infty$.

Zadanie 2. Wyznaczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x \sin x \cdot \operatorname{tg}(x \sin x)} - \frac{1}{x^2 \sin^2 x} \right)$

Zadanie 3. Wyznaczyć przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$ (określić jej maksymalną dziedzinę, znaleźć granice w $\pm\infty$, ekstrema lokalne, przedziały monotoniczności, przedziały wklęsłości/wypukłości).

Zadanie 4. Załóżmy, że f jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną w pewnym otoczeniu 0, spełniającą $f(0) = 0$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$. Wyznaczyć rozwinięcie Taylora funkcji $h(x) = f(f(x))$ wokół 0 do rzędu x^3 włącznie.

Zadanie 5. Wykazać, że funkcja dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

jest n-krotnie różniczkowalna na $\mathbb{R}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.