

Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania domowe, seria 2.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **19 III 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

Zadanie 1. Obliczyć granice:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \sqrt{\cos 2x}}{x^2 \ln \cos x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

Zadanie 2. Wyznaczyć kres dolny funkcji

$$f(x) = \ln(e^x - 1) + \frac{2}{x} - x$$

na przedziale $(0, \infty)$.

Zadanie 3. Wykazać, że dla $|x| < 1$ błąd przybliżenia $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ nie przekracza $\frac{1}{720}$.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, gdzie $g \in \mathbb{R}$, to zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \right) = g.$$

Zadanie 5. Rozstrzygnąć, czy funkcja zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w $x = 0$.