

Analiza matematyczna I.2  
semestr letni 2023/2024  
zadania domowe, seria 1.

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **12 III 2024** (lub wysłać mailem przed rozpoczęciem ćwiczeń).

**Zadanie 1.** Załóżmy, że  $e \leq x < y$ . Wykazać, że  $y^x < x^y$  i wywnioskować stąd, że  $\pi^e < e^\pi$ .

**Zadanie 2.** Załóżmy, że  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją różniczkowalną. Wykazać, że jeśli dla pewnego  $g \in \mathbb{R}$  zachodzi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = g$ , to  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = g$ .

**Zadanie 3.** Zbadać różniczkowalność funkcji  $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .

**Zadanie 4.** Wyznaczyć pochodną funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem  $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor) \sin^2 \pi x$ .

**Zadanie 5.** Dla dowolnego  $x \in [0, 1)$  oraz  $n \in \mathbb{N}$  udowodnić nierówność

$$\ln(1-x) \leq -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}.$$