

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 27 III 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^\alpha} = 1.$$

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ posiada asymptoty w $x = a$ oraz w nieskończoności.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2 spełniającą $f(0) = 0$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \rfloor} f(kx).$$

Zadanie 4. Zbadać liczbę rozwiązań równania $\operatorname{tg} x = ax + b$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ w zależności od parametrów a i b .

Zadanie 5. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą taką, że $f'(0)$ istnieje oraz $f'(0) > 1$, $f(0) \geq 0$. Wykazać, że wówczas $f(x) \geq x$ dla $x > 0$.