Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 22 III 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać dla dowolnych $x, y \geqslant 0$ oraz $p, q > 0$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nierówność

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Zadanie 2. Wykazać dla dowolnych $x, y > 0$ nierówność

$$x \ln x + y \ln y \geqslant (x + y) \ln \left(\frac{x + y}{2} \right).$$

Zadanie 3. Wykazać nierówności:

(a) $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$

(b) $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geqslant 1$, gdzie α, β, γ są kątami pewnego trójkąta

(c) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geqslant \frac{3}{4}$, gdzie α, β, γ są kątami pewnego trójkąta

Zadanie 4. Zbadać wypukłość funkcji $f : (0, e^2) \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = -\frac{2}{\ln x - 2}.$$

Czy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że funkcja $g(x) = f(x)^n$ jest wypukła na przedziale $(0, e)^2$?