Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 15 III 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć dwoma sposobami (przez bezpośrednie obliczenie pochodnych oraz przez odwracanie szeregu) rozwinięcie Taylora rzędu 3 dla funkcji $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ w otoczeniu $x = 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną na przedziale $[0, 1]$ spełniającą $f(0) = f(1) = 0$. Załóżmy ponadto, że druga pochodna f w przedziale $(0, 1)$ jest ograniczona, $|f''(x)| \leqslant A$ dla $x \in (0, 1)$. Wykazać, że wówczas $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$ dla $x \in [0, 1]$.

Zadanie 3. Znaleźć wartości parametrów a i b, dla których poniższa granica jest skończona

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^5}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ i dowolnej funkcji $f \in C^2(\mathbb{R})$ spełniającej warunki $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ prawdziwa jest równość

$$\lim_{x\to\infty} \left(f\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\right)^x = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Zadanie 5. Niech $x > -1$, $x \neq 0$. Korzystając z rozwinięcia Taylora wykazać nierówności:

(a) $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$, jeśli $\alpha < 0$ lub $\alpha > 1$

(b) $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$, jeśli $\alpha \in (0, 1)$

Zadanie 6. Niech $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$, $n \geqslant 0$.

(a) Wykazać, że H_n jest wielomianem stopnia n spełniającym wzór rekurencyjny

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

(b) Wykazać, że H_n jest funkcją parzystą dla parzystego n oraz nieparzystą dla nieparzystego n.

(c) Wykazać, że H_n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.