

Analiza matematyczna I.2  
semestr letni 2023/2024  
zadania na ćwiczenia, 5 III 2024

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Wyznaczyć  $n$ -tą pochodną funkcji:

(a)  $f(x) = \sin^2 x$

(b)  $g(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

**Zadanie 2.** Wykazać dla dowolnego  $x \in [0, 1]$  oraz  $p \geq 1$  nierówność

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

**Zadanie 3.** Udowodnić nierówności:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

**Zadanie 4.** Udowodnić nierówności

(a)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$

(b)  $x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y), 0 < y < x, p > 1$

(c)  $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|, a, b \in \mathbb{R}$

(d)  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, 0 < b < a$

**Zadanie 5.** Określić, ile rozwiązań w zależności od parametru  $a \in \mathbb{R}$  ma równanie:

(a)  $x^5 - 5x = a$

(b)  $e^x = ax^2$