

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 1 III 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć pochodne funkcji:

(a) $f(x) = \arccos x$

(b) $g(x) = \operatorname{arctg} x$

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1$, to musi być stała.

Zadanie 3. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i spełnia dla każdego $x \in \mathbb{R}$ równanie $f(x) = f'(x)$. Wykazać, że f jest postaci $f(x) = ae^x$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Udowodnić nierówności:

(a) $\sin x > \frac{2}{\pi}x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(b) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}$

(c) $\operatorname{tg} x \geq x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(d) $\sin(\operatorname{tg} x) \geq x, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

Zadanie 5. Wykazać dla dowolnego $x > 0$ tożsamość $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.