Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 26 IV 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozważmy szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ o promieniach zbieżności odpowiednio R_1 i R_2. Wykazać, że jeśli $R_1 \neq R_2$, to promień zbieżności R szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ jest równy $R = \min\{R_1, R_2\}$. Wykazać, że jeśli $R_1 = R_2$, to $R \geqslant R_1$ i nierówność może być ostra.

Zadanie 2. Rozważmy szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o promieniu zbieżności $R > 0$. Niech $x_0 \in (-R, R)$. Wykazać, że $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ dla $|x - x_0| < R - |x_0|$.

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie funkcje parzyste f, które są analityczne i spełniają równanie

$$f'(x) = x f(x).$$

Zadanie 4. Wykazać, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ spełnia dla $x \in \mathbb{R}$ równanie

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x.$$