Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 23 IV 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć przedział zbieżności następujących szeregów potęgowych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-1)^n$

Zadanie 2. Załóżmy, że szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma skończony promień zbieżności $R > 0$. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n a_n x^{n^3}$.

Zadanie 3. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2},$$

a następnie wykazać, że jego suma jest w przedziale zbieżności różniczkowalna i wyrazić pochodną jawnym wzorem.

Zadanie 4. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego, $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Wykazać, że szereg $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, a następnie wyprowadzić wzór

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

i wykorzystać go do znalezienia jawnego wzoru na F_n.

Zadanie 5. Wykazać wzór

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$