Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 19 IV 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}$$

jest ciągła w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Zadanie 2. Załóżmy, że funkcje $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ są nieujemne i ciągłe oraz że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny punktowo do funkcji ciągłej. Wykazać, że wówczas zbieżność szeregu jest jednostajna.

Zadanie 3. Wykazać, że szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

są zbieżne jednostajnie na zbiorze $[\delta, 2\pi - \delta]$, gdzie $\delta > 0$. Zbadać analogiczną zbieżność dla szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\theta}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{x + n}}$$

na przedziale $[0, \infty)$.

Zadanie 5. Zbadać ciągłość sumy szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{nx} \cos \frac{x}{n}$$

na przedziale $(0, \pi)$.

Zadanie 6. Zbadać zbieżność jednostajną szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$$

na przedziale $[-A, A]$, $A > 0$.

Zadanie 7. Załóżmy, że $f_n \in C([0,1])$ oraz że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[0,1)$. Wykazać, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(1)$ jest zbieżny.