Analiza matematyczna I.2

semestr letni 2023/2024

zadania na ćwiczenia, 16 IV 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ jest zbieżny jednostajnie na odcinku $[0,1]$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy ciąg funkcji $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ zadanych wzorem

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [n, n+1) \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[1,\infty)$, mimo że nie stosuje się do niego kryterium Weierstrassa.

Zadanie 3. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego $x \in \mathbb{R}$, lecz nie jest zbieżny jednostajnie na żadnym przedziale postaci $[-a,a]$, $a > 0$.

Zadanie 4. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}$ nie jest zbieżny bezwzględnie dla żadnego $x \in \mathbb{R}$, ale jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$.

Zadanie 5. Wykazać, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ jest ciągła na $\mathbb{R}$. Czy jest ona różniczkowalna na $\mathbb{R}$?