

Analiza matematyczna I.2
semestr letni 2023/2024
zadania na ćwiczenia, 9 IV 2024

Michał Kotowski

Zadanie 1. Z badać, dla jakich $p > 0$ ciąg f_n zadany wzorem

$$f_n(x) = \frac{nx^p}{(x+1)^n}.$$

jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, \infty)$.

Zadanie 2. Wykazać, że granica punktowa funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną. Określamy ciąg funkcyjny $f_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right)$. Wykazać, że wówczas $f_n \rightrightarrows f'$.

Zadanie 4. Z badać zbieżność punktową i jednostajną poniższych ciągów funkcji f_n dla podanych zbiorów A :

(a) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, A = (0, \infty)$

(b) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, A = (-c, c), c > 0$, oraz $A = \mathbb{R}$

(c) $f_n(x) = (1 + x^n)^{1/n}, A = [0, 1]$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli ciąg wielomianów jest zbieżny jednostajnie na \mathbb{R} , to jego granica jest wielomianem.