

# Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 8

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach w piątek **7 grudnia** lub wysłać mailem na adres [michal.kotowski@mimuw.edu.pl](mailto:michal.kotowski@mimuw.edu.pl) **przed** rozpoczęciem ćwiczeń.

**Zadanie 1.** Niech  $a > 0$  i  $b > a + 1$ . Wyznaczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}.$$

**Zadanie 2.** Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\log n}}, \quad a > 0$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\log \log n}}, \quad a > 0$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b} \right), \quad a, b, \in \mathbb{R}$

**Zadanie 3.** Dla  $a > 0$  rozpatrzmy klasę wszystkich ciągów liczb dodatnich  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  takich, że  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości, jakie może przybierać  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$  dla ciągów z tej klasy.

**Zadanie 4.** Załóżmy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach nieujemnych jest zbieżny. Pokazać, że wówczas szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$  również jest zbieżny. Podać przykład, że w ogólności implikacja w drugą stronę nie zachodzi, ale zachodzi przy dodatkowym założeniu, że  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  jest ciągiem ściśle malejącym.

**Zadanie 5.** Załóżmy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach dodatnich jest rozbieżny. Niech  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  oznacza ciąg sum częściowych tego szeregu. Udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

jest rozbieżny, natomiast szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$$

jest zbieżny.