Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 7

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach we wtorek **27 listopada.**

Zadanie 1. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ciągiem ograniczonym dodatnim spełniającym dla dowolnych $n, k \geqslant 1$ takich, że $1 \leqslant k < n$, nierówność

$$a_n^n \geqslant a_k^k \, a_{n-k}^{n-k}.$$

Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$.

Zadanie 2. Niech $k \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Dla $a_0 > 0$ definiujemy rekurencyjnie ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ wzorem

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$$

dla $n \geqslant 0$. Znaleźć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}.$$

Zadanie 3. Czy istnieje funkcja $f\colon [0,1] \to [0,1]$ o tej własności, że dla dowolnego przedziału otwartego $I \subseteq [0,1]$ zachodzi $f(I) = [0,1]$?

Zadanie 4. Rozpatrzmy ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ i niech $a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $A = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$. Pokazać, że wówczas dowolny punkt z przedziału (a, A) jest punktem skupienia ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$.

Zadanie 5. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich posiadających co najmniej jeden punkt skupienia różny od 0 i $\pm\infty$. Udowodnić, że istnieje taka permutacja $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indeksów ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, że jeśli przyjmiemy $b_n = a_{\sigma(n)}$, to ciąg $\{\sqrt[n]{b_n}\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny.