Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 6

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **13 listopada** lub wysłać mailem na adres michal.kotowski@mimuw.edu.pl **przed** rozpoczęciem ćwiczeń.

Zadanie 1. Ustalmy $\alpha \in (0,1)$. Niech $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ będzie ciągiem ograniczonym spełniającym nierówność

$$a_{n+2} \leqslant \alpha a_{n+1} + (1-\alpha) a_n$$

dla $n \geqslant 0$. Udowodnić, że ciąg $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ jest zbieżny.

Zadanie 2. Rozpatrzmy ciąg $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ zdefiniowany równaniem

$$a_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + a_n}}$$

dla $n \geqslant 1$, z warunkami początkowymi $a_1 = \sqrt{7}$, $a_2 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}$. Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Zadanie 3. Załóżmy, że dla ciągu $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ zachodzi

$$\lim_{n \to \infty} (2a_{n+1} - a_n) = g$$

dla $g \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że wówczas $\lim_{n \to \infty} a_n = g$.

Zadanie 4. Niech $\{r_n\}_{n \geqslant 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich spełniającym $\lim_{n \to \infty} r_n = 0$. Niech S będzie zbiorem liczb dających się zapisać w postaci

$$r_{i_1} + r_{i_2} + \ldots + r_{i_{2018}}$$

dla pewnych $i_1 < i_2 < \ldots < i_{2018}$. Udowodnić, że dowolny niepusty przedział (a,b) zawiera niepusty przedział (c,d), który nie zawiera żadnych elementów z S.

Zadanie 5. Niech $a, b > 0$. Znaleźć granicę $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$.