Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 5

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach we wtorek **6 listopada.**

Zadanie 1. Niech $a \in \{1, \ldots, 9\}$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a + aa + \ldots + \overbrace{aa\ldots a}^{n}}{10^n}.$$

Zadanie 2. Obliczyć dla $x \geqslant 1$ granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\sqrt[n]{x} - 1\right)^n.$$

Zadanie 3. Dla ustalonego $a > 0$ określamy ciąg rekurencyjny

$$a_{n+1} = \frac{a}{a_n} - 1$$

przy warunku początkowym $a_1 < 0$. Pokazać, że ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny do ujemnego pierwiastka równania $x^2 + x = a$.

Zadanie 4.

(a) Załóżmy, że dany jest ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ o tej własności, że ciągi $\{a_{2k}\}_{k\geqslant 0}$, $\{a_{2k+1}\}_{k\geqslant 0}$ oraz $\{a_{3k}\}_{k\geqslant 0}$ są zbieżne. Pokazać, że wówczas ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny. Czy implikacja ta zachodzi, jeżeli jedynie dwa z powyższych ciągów są zbieżne?

(b) Załóżmy, że dany jest ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ o tej własności, że dla dowolnego całkowitego $k \geqslant 2$ ciąg $\{a_{kn}\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny. Czy wynika stąd, że ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny?

Zadanie 5. Załóżmy, że dany jest ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ o tej własności, że dla dowolnego $\gamma > 1$ ciąg $\{a_{\lfloor \gamma^n \rfloor}\}_{n\geqslant 0}$ jest zbieżny do 0. Czy wynika stąd zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ do 0?