Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 4

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach we wtorek **30 października** lub wysłać mailem na adres michal.kotowski@mimuw.edu.pl **przed** rozpoczęciem ćwiczeń.

Zadanie 1. Znajdź kresy zbiorów i rozstrzygnij, czy są przyjmowane:

(a) $A = \{\frac{nm}{2n^2+m^2} \,|\, n, m \neq 0,\, n, m \in \mathbb{Z}\}$

(b) $B = \{\frac{n^2 m}{n^2+m^2+n^4 m} \,|\, n, m > 0,\, n, m \in \mathbb{N}\}$

(c) $C = \{\sqrt[k]{n} - \lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor \,|\, n > 0,\, n \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{\sqrt[n]{n} \,|\, n > 0,\, n \in \mathbb{N}\}$

Zadanie 2. Ustalmy dowolną liczbę naturalną $k \geqslant 1$. Załóżmy, że ciąg liczb nieujemnych $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ spełnia nierówność $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ dla wszystkich m, n takich, że $|m - n| \leqslant k$. Czy wynika stąd, że istnieje wówczas granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$?

Zadanie 3. Niech $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby $x \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n \right\}$$

Zadanie 4. Dla ustalonej liczby całkowitej $n \geqslant 1$ niech $M(n)$ oznacza największą liczbą całkowitą m, dla której zachodzi

$$\binom{m}{n-1} > \binom{m-1}{n}.$$

Wyznaczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n}.$$

Zadanie 5. Przypuśćmy, że a, b, c, gdzie $a \neq 0$, są liczbami całkowitymi takimi, że dla dowolnego $n \geqslant 1$ liczba $an^2 + bn + c$ jest kwadratem liczby naturalnej. Udowodnić, że dla pewnych liczb całkowitych x i y zachodzi $a = x^2$, $b = 2xy$, $c = y^2$.