# Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 3

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach we wtorek **23 października.**

**Zadanie 1.** Udowodnić dla $n \geqslant 2$ następujące oszacowania na współczynnik dwumianowy

(a)

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n$$

(b)

$$\binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt{2n} - 1}$$

**Zadanie 2.** Rozpatrzmy ciąg

$$123456789101112131415161718192021\ldots$$

powstały przez napisanie kolejno cyfr wszystkich liczb naturalnych. Jeśli $10^n$-ta cyfra w tym ciągu pochodzi z napisania liczby $m$-cyfrowej, to przyjmujemy $f(n) = m$. Przykładowo, $f(2) = 2$, gdyż setna cyfra w ciągu pochodzi z napisania dwucyfrowej liczby 55. Wyznaczyć $f(2018)$.

**Zadanie 3.** Wyznacz kresy zbioru

$$A_n = \left\{ \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} \middle| a_1, \ldots, a_n > 0 \right\}$$

i rozstrzygnij, czy są one osiągane.

**Zadanie 4.** Niech $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i niech $\lambda_i \geqslant 0$ spełniają warunek $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Udowodnij, że

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{-1} \right) \leqslant \frac{(x_1 + x_n)^2}{x_1 x_n}.$$

**Zadanie 5.** Dla liczby całkowitej dodatniej $n$ niech $\sigma(n)$ oznacza sumę wszystkich jej dodatnich dzielników, a $\tau(n)$ liczbę wszystkich jej dodatnich dzielników. Udowodnić, że $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geqslant \sqrt{n}$.