Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 2

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach we wtorek **16 października.**

Zadanie 1. Wyznacz kres dolny i górny zbioru

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \,\middle|\, m, n \geqslant 1,\ m, n, \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zadanie 2. Udowodnić, że liczba $\sqrt{n^2 + 3n}$ jest niewymierna dla każdego naturalnego $n \geqslant 2$.

Zadanie 3. Dla liczby rzeczywistej α określamy ciąg:

$$S(\alpha) = (\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots)$$

(a) Udowodnić, że jeśli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\alpha \neq \beta$, to $S(\alpha) \neq S(\beta)$.

(b) Udowodnić, że każda liczba naturalna wystąpi w dokładnie jednym z ciągów $S(\sqrt{2})$ lub $S(2 + \sqrt{2})$ (ale nie w obu naraz). Dla ilustracji:

$$S(\sqrt{2}) = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, \ldots)$$
$$S(2 + \sqrt{2}) = (3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, \ldots)$$

Wskazówka: dla ustalonego n policzyć, ile w każdym z ciągów jest różnych wyrazów nie większych niż n.

Zadanie 4. Dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots$ niech $r_n = \min |c - d\sqrt{3}|$, gdzie minimum jest po wszystkich parach liczb całkowitych nieujemnych c, d takich, że $c + d = n$. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą g taką, że $r_n \leqslant g$ dla każdego n.

Zadanie 5. Niech n będzie liczbą całkowitą nieujemną. Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = |x| + |x - 1| + \ldots + |x - n|.$$

Wyznacz minimum funkcji f.