Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 12

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach w piątek **25 stycznia.**

Zadanie 1. Załóżmy, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz istnieją skończone granice $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Pokazać, że wówczas f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Czy zachodzi implikacja przeciwna?

Zadanie 2. Załóżmy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją lipschitzowską. Udowodnić, że f można zapisać jako różnicę dwóch funkcji niemalejących.

Zadanie 3. Rozważmy funkcję Cantora $c\colon [0,1] \to [0,1]$ zdefiniowaną następująco: dla danego $x \in [0,1]$ rozpatrujemy rozwinięcie x przy podstawie 3. Jeśli zawiera ono jedynkę, wszystkie cyfry następujące po pierwszej jedynce zamieniamy na 0. Następnie (niezależnie od poprzedniego kroku) wszystkie dwójki zamieniamy na jedynki. Powstałą liczbę traktujemy jako rozwinięce dwójkowe $c(x)$.

Udowodnić, że zdefiniowana w ten sposób funkcja spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Zadanie 4. Zbadać jednostajną ciągłość na przedziałach $(0,1]$ oraz $[1,\infty)$ funkcji:

(a) $f(x) = \log\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

(b) $f(x) = (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}} \log x$

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y, \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$