Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 11

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach we wtorek **15 stycznia.**

Zadanie 1. Załóżmy, że $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją o tej własności, że dla dowolnego $a > 0$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} f(an) = 0$. Czy wynika stąd, że istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

Zadanie 2. Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right) - \log\frac{x}{2}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2\sin\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$

Zadanie 3. Rozpatrzmy dowolne ponumerowanie liczb wymiernych z odcinka jednostkowego, $\mathbb{Q}\cap[0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Określamy funkcję f jako

$$f(x) = \sum_{n\,:\,q_n \leqslant x} \frac{1}{2^n}.$$

(a) Uzasadnij, że f jest niemalejąca, $f(x) = 0$ dla $x < 0$ oraz $f(x) = 1$ dla $x \geqslant 1$.

(b) Pokaż, że f nie jest ciągła w żadnym punkcie $x \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$, a dokładniej

$$\lim_{y\to x^-} f(y) < \lim_{y\to x^+} f(y).$$

Ile wynosi różnica tych dwóch liczb?

(c) Wykaż, że f jest prawostronnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f\colon [0,2] \to [0,2]$ jest ciągła i spełnia $f(0) = f(2)$. Wykazać, że istnieje $x \in [0,1]$ takie, że $f(x) = f(x+1)$.

Zadanie 5. Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, która miałaby w każdym punkcie granicę równą $+\infty$.