Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 10

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać **pisemnie** i oddać na ćwiczeniach w piątek **21 grudnia** lub wysłać mailem na adres michal.kotowski@mimuw.edu.pl **przed** rozpoczęciem ćwiczeń.

Zadanie 1. Pokazać, że dla dowolnego wyboru znaków $\varepsilon_n = \pm 1$ suma szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$$

jest liczbą niewymierną.

Zadanie 2. Uzasadnić zbieżność i obliczyć sumę szeregu

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{3^{-n+k}}{2^k k!} \right)$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{3^{-n+k}}{2^k k!} \right)$

Zadanie 3. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$, gdzie $\{\varepsilon_n\}_{n \geqslant 1}$ to ciąg powstały przez napisanie a razy $+1$, następnie b razy -1, potem a razy $+1$ itd. Udowodnić, że powstały szereg jest zbieżny tylko dla $a = b$.

Zadanie 4. Podać przykład szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takiego, że dla dowolnego całkowitego $k \geqslant 2$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ jest rozbieżny.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^a}{n^b}, \quad a, b > 0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{\log n}}{n^b}, \quad b > 0$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right)$