Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria 1

Michał Kotowski

Zadania należy rozwiązać i być gotowym do ich zreferowania na ćwiczeniach we wtorek **9 października.**

Zadanie 1. Udowodnić dla liczb wymiernych $x, y > 0$ nierówność

$$x^y + y^x > 1.$$

Zadanie 2. Dane są liczby rzeczywiste dodatnie $p_1, \ldots, p_n$. Znaleźć minimum wyrażenia

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2$$

dla rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ spełniających $p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n = 1$.

Zadanie 3. Ustalmy liczbę rzeczywistą $p \in (0, 1)$. Udowodnić, że dla nieujemnych rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zadanie 4. Udowodnić dla $n \geqslant 1$ nierówność

$$1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}.$$

Zadanie 5. Niech $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ będzie wielomian o współczynnikach rzeczywistych, które wszystkie pierwiastki są rzeczywiste. Udowodnić, że wówczas wszystkie pierwiastki są zawarte w przedziale o końcach

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}.$$