Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania domowe, seria świąteczna

Michał Kotowski

Nieobowiązkowa seria zadań domowych, służąca głównie dobrej zabawie.

Zadanie 1. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn} = 0$. Udowodnić, że $a_n = 0$ dla każdego $n \geqslant 1$.

Zadanie 2. Załóżmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny. Udowodnić, że istnieje taki ciag liczb rzeczywistych $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| = \infty$.

Zadanie 3. Ustalmy $p > 1$. Udowodnić, że jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ jest zbieżny, to zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|^p$$

i stała po prawej stronie nierówności jest optymalna.

Zadanie 4. Ustalmy $c > 0$ i rozpatrzmy ciąg zdefiniowany rekurencyjnie $a_0 = c$, $a_{n+1} = c^{a_n}$. Zbadać zbieżność ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ w zależności od c.

Zadanie 5. Udowodnij, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sin n|^n$ jest rozbieżny. Czy ciąg $\{(\sin n)^n\}_{n\geqslant 1}$ jest gęsty w $(0, 1)$?

Zadanie 6. Udowodnić, że jeśli szereg liczb dodatnich $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to zachodzi nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant e \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

i stała e po prawej stronie jest optymalna.