

Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 –
zadania na ćwiczenia 9 listopada

Michał Kotowski

Zadanie 1. Obliczyć granice

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \dots + \frac{(k+n)!}{n!} \right)$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^k} (1^k + 2^k + \dots + n^k) - \frac{n}{k+1} \right)$

Zadanie 2. Niech $k \geq 1$ będzie ustaloną liczbą całkowitą. Znaleźć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}$$

Zadanie 3. Rozpatrzmy ciąg $\{a_n\}_{n \geq 1}$ zdefiniowany rekurencyjnie

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(1 - a_n), \quad n \geq 1.$$

Udowodnić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$.