Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 19 października

Michał Kotowski

Zadanie 1. Rozpatrzmy tzw. *równanie Pella* postaci

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

gdzie d jest dodatnią liczbą całkowitą, która nie jest kwadratem liczby naturalnej. Równanie to zawsze posiada dwa trywialne rozwiązania w liczbach całkowitych – wystarczy przyjąć $(x, y) = (\pm 1, 0)$. W tym zadaniu pokażemy, że zawsze istnieje co najmniej jedno całkowite nietrywialne rozwiązanie.

Niech $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{x + y\sqrt{d} \, : \, x, y, \in \mathbb{Z}\}$. Dla liczby $x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ liczbą *sprzężoną* do niej nazwiemy liczbę $x - y\sqrt{d}$. Na zbiorze $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ określamy *normę* wzorem

$$\left\| x + y\sqrt{d} \right\| := (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2.$$

(a) Pokazać, że dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ zachodzi $\|\alpha \cdot \beta\| = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$.

(b) Korzystając z twierdzenia Dirichleta udowodnić, że dla pewnej liczby całkowitej dodatniej N istnieje nieskończenie wiele par względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich (x, y) takich, że $|x^2 - dy^2| < N$.

(c) Wywnioskować z poprzedniego podpunktu, że dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$, $n < N$, istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania $x^2 - dy^2 = n$, a wśród nich co najmniej dwa rozwiązania (x_1, y_1), (x_2, y_2) takie, że $x_1 = x_2 \mod |n|$ i $x_1 = x_2 \mod |n|$.

(d) Korzystając z poprzednich podpunktów pokazać istnienie nietrywialnych rozwiązań równania Pella.

Zadanie 2. Niech α będzie liczbą algebraiczną stopnia $d \geqslant 2$. Udowodnij, że istnieje stała $C_\alpha > 0$ taka, że dla dowolnych $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ mamy

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{C_\alpha}{q^d}.$$

Zadanie 3. Niech α będzie liczbą rzeczywistą, której przedstawienie jako ułamek łańcuchowy jest nieskończone i od pewnego miejsce okresowe. Udowodnić, że α jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych.

Zadanie 4. W tym zadaniu udowodnimy implikację odwrotną do poprzedniego zadania: jeśli $\alpha \notin \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych, to przedstawienie α jako ułamek łańcuchowy jest od pewnego miejsca okresowe.

Załóżmy, że α spełnia równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(a) Niech $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ i niech x_n oznacza n-tą resztę, tzn. $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n + x_n]$. Korzystając z równości

$$x = \frac{p_{n-1}x_n + p_n}{q_{n-1}x_n + q_n}$$

udowodnić, że x_n spełnia równanie kwadratowe

$$A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_n &= ap_n^2 + bp_nq_n + cq_n^2, \\ B_n &= 2ap_np_{n-1} + b(p_nq_{n-1} + p_{n-1}q_n) + 2cq_nq_{n-1}, \\ C_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2. \end{aligned}$$

(b) Korzystając z twierdzenia Dirichleta wywnioskować, że A_n, B_n, C_n są wspólnie ograniczone przez stałą zależną tylko od a, b, c, α i w związku z tym jest tylko skończenie wiele możliwych trójek (A_n, B_n, C_n).

(c) Udowodnić korzystając z poprzedniego podpunktu, że wobec tego dla pewnych $n \neq m$ mamy $x_n = x_m$, skąd wynika okresowość (od pewnego miejsca) rozwinięcia α w ułamek łańcuchowy.