Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 12 i 16 października

Michał Kotowski

Zadanie 1. Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

(a) Udowodnić, że dla p, q rzeczywistych spełniających $0 < p \leqslant q$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[q]{x_1^q + \ldots + x_n^q} \leqslant \sqrt[p]{x_1^p + \ldots + x_n^p}.$$

(b) Znaleźć najmniejszą stałą $C_{n,p,q}$ taką, aby dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n$ dodatnich zachodziła nierówność

$$\sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p} \leqslant C_{n,p,q} \sqrt[q]{x_1^q + \cdots + x_n^q}.$$

Zadanie 2. Niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Pokazać, że dla $n \geqslant 2$ liczba H_n nigdy nie jest całkowita.

Zadanie 3. Dla zbiorów $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że A jest *gęsty* w B, jeżeli dla każdego $b \in B$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $a \in A$, że $|a - b| < \varepsilon$.

(a) Niech α będzie dowolną liczbą niewymierną. Udowodnić, że ciąg $(\{n\alpha\})_{n \geqslant 1}$ jest gęsty na odcinku $[0, 1]$.

(b) Czy jeśli α jest liczbą niewymierną, to ciąg $(\{2^n\alpha\})_{n \geqslant 1}$ musi być gęsty w $[0, 1]$?

Zadanie 4. Niech $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Udowodnić, że ciąg $(\{\alpha^n\})_{n \geqslant 0}$ nie jest gęsty na odcinku $[0, 1]$.