Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 22 stycznia

Michał Kotowski

Zadanie 1. Wyznaczyć stałe $a, b, c \in \mathbb{R}$ takie, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{dla } x \leqslant 0 \\ cx^2 + dx, & \text{dla } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

była różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left|\cos \frac{\pi}{x}\right|, & \text{dla } x \neq 0 \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Udowodnić, że f jest różniczkowalna w 0, ale nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie $x_n = \frac{2}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 3. Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a. Załóżmy, że $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$, $\{y_n\}_{n \geqslant 0}$ są dwoma ciągami takimi, że $x_n \to a$, $y_n \to a$ oraz $x_n, y_n \neq a$, $x_n \neq y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Podać przykład funkcji f takiej, że granica

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

(a) istnieje i jest równa $f'(a)$,

(b) nie istnieje lub istnieje, ale jest różna od $f'(a)$.

Zadanie 4. Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie a. Załóżmy, że $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$, $\{y_n\}_{n \geqslant 0}$ są dwoma ciągami takimi, że $x_n \to a$, $y_n \to a$ oraz $x_n < a < y_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$