Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 18 stycznia

Michał Kotowski

Zadanie 1. Udowodnić, że jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia równanie funkcyjne $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$, to $f(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że to samo jest prawdą przy słabszym założeniu, że f jest ciągła przynajmniej w jednym punkcie.

Zadanie 2. Sprawdzić, czy następujące funkcje są jednostajnie ciągłe na $(0, 1)$:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

(d) $f(x) = \log x$

(e) $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{x}$

Zadanie 3. Sprawdzić, czy następujące funkcje są jednostajnie ciągłe na $[0, \infty)$:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = x \sin x$

(c) $f(x) = \sin x^2$

(d) $f(x) = \sin(\sin x)$

Zadanie 4. Dla funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \subset \mathbb{R}$ zdefiniujmy funkcję

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,:\, x, y \in A, |x - y| < \delta\}$$

zwaną *modułem ciągłości* f. Udowodnić, że funkcja f jest jednostajnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \omega_f(\delta) = 0$.

Zadanie 5. Załóżmy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 0$. Pokazać, że wówczas funkcja f jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 6. Załóżmy, że funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\alpha > 1$. Pokazać, że wówczas funkcja f jest stała.

Zadanie 7. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ nie jest lipschitzowska na $[0, \infty)$.