# Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 11 stycznia

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Zbadać ciągłość funkcji:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \text{ oraz } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \text{dla } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ względnie pierwsze} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \text{ oraz } x = 0 \\ \frac{qx}{q+1}, & \text{dla } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ względnie pierwsze} \end{cases}$$

**Zadanie 2.** Podać przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która posiada dokładnie jeden punkt ciągłości.

**Zadanie 3.** Znaleźć wszystkie pary liczb rzeczywistych $a, b$ takie, że funkcja $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1+x)}, & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ b, & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1+2x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}}, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

**Zadanie 4.** Udowodnić, że zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ może być co najwyżej przeliczalny.

**Zadanie 5.** Załóżmy, że funkcje $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Udowodnić, że funkcja $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ również jest ciągła.

**Zadanie 6.** Udowodnić, że jeżeli funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcje

$$m(x) = \inf\{f(t) \,:\, t \in [a, x]\}$$

oraz

$$M(x) = \sup\{f(t) \,:\, t \in [a, x]\}$$

również są ciągłe.

**Zadanie 7.** Dana jest funkcja ciągła $f\colon [-1,1] \to (0,1]$. Wykazać, że równanie $f(x) = x^4$ ma co najmniej dwa rozwiązania na przedziale $[-1,1]$.

**Zadanie 8.** Załóżmy, że $f\colon (A,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją spełniającą $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$ i ograniczoną na dowolnym przedziale ograniczonym zawartym w $(A,\infty)$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.