Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 5 października

Michał Kotowski

Zadanie 1 (Nierówność AM-GM z wagami)**.** Dane są liczby rzeczywiste nieujemne $p_1, \dots, p_n$ takie, że $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$ zachodzi nierówność

$$a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_n^{p_n} \leqslant p_1 a_1 + p_2 a_2 + \ldots + p_n a_n.$$

Zadanie 2 (Nierówność Younga)**.** Niech p, q będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geqslant xy.$$

Zadanie 3 (Nierówność Höldera)**.** Niech p, q będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnić, że dla dowolnych rzeczywistych $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Zadanie 4 (Nierówność Minkowskiego)**.** Ustalmy liczbę rzeczywistą $p \geqslant 1$. Udowodnić, że dla dowolnych rzeczywistych $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$