Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 8 stycznia

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać istnienie granic:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{a}\lfloor\frac{b}{x}\rfloor, \quad a, b > 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}\right)$

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $f\colon (-a, a)\setminus\{0\} \to (0, +\infty)$ spełniającą własność

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x) + \frac{1}{f(x)}\right) = 2$$

. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Zadanie 3. Załóżmy, że $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną spełniającą dla pewnych $a, b > 1$ równość $f(ax) = bf(x)$, o ile $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}$. Udowodnić, że $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

Zadanie 4. Załóżmy, że $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są dwiema funkcjami okresowymi, z których każda ma okres minimalny. Załóżmy, że zachodzi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. Udowodnić, że funkcje f i g mają ten sam okres i wywnioskować stąd, że muszą być sobie równe.