Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 21 grudnia

Michał Kotowski

Zadanie 1. Znaleźć postać iloczynu Cauchy'ego szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ z samym sobą i obliczyć jego sumę.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ z samym sobą.

Zadanie 3. Udowodnić, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k(b_n+b_{n-1}+\ldots+b_{n-k+1})=0.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ są ciągami liczb dodatnich malejących monotonicznie do 0. Udowodnić, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty}b_n(a_0+\ldots+a_n)=0.$$

Zadanie 5. Udowodnić, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha}$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\beta}$ $(\alpha,\beta>0)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha+\beta>1$.