# Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 18 grudnia

Michał Kotowski

**Zadanie 1.** Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^a + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad a > 0$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\log \log n}$

**Zadanie 2.** Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Udowodnić, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

**Zadanie 3.** Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ma ograniczone sumy częściowe. Udowodnić, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ jest zbieżny bezwzględnie i $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$, to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^k$ jest zbieżny.