Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 11 grudnia

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}.$$

Zadanie 2. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich.

(a) Udowodnić, że jeśli $\liminf\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

(b) Udowodnić, że jeśli dla dostatecznie dużych n zachodzi $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest rozbieżny.

Zadanie 3. Załóżmy, że $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem liczb dodatnich takim, że dla pewnych $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ oraz pewnego ciągu ograniczonego $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ zachodzi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny dla $\alpha > 0$ i rozbieżny dla $\alpha \leqslant 0$.