Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 27 i 30 listopada

Michał Kotowski

Zadanie 1. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1), \quad a > 1$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, \quad a > 1$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$

Zadanie 3. Załóżmy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest rozbieżny. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność następujących szeregów w zależności od parametru α:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log\log n}$

Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich istnieje taki ciąg liczb dodatnich $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, że $b_n \to \infty$ oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.