Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 23 listopada

Michał Kotowski

Zadanie 1. Udowodnić, że ciągi $\{a_n\}_{n\geqslant 2}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 2}$ zdefiniowane jako

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \log n,$$
$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n$$

są monotoniczne i wywnioskować stąd, że oba są zbieżne do tej samej granicy skończonej.

Zadanie 2. Wyznaczyć sumę szeregu

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ldots(n+m)}, \quad m \in \mathbb{N}$

Zadanie 3. Dla $k \geqslant 2$ całkowitego i $x \in \mathbb{R}$ rozpatrzmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)k+1} + \frac{1}{(n-1)k+2} + \ldots + \frac{1}{nk-1} - \frac{x}{nk} \right).$$

Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna wartość x, dla której szereg ten jest zbieżny, i wyznaczyć w tym przypadku sumę szeregu.