Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 16 i 20 listopada

Michał Kotowski

Zadanie 1. Załóżmy, że ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ spełnia dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ nierówność $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$ (ciągi takie nazywamy *podaddytywnymi*). Wykazać, że istnieje wówczas granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Zadanie 2. Ustalmy $\lambda \in (0,1)$. Załóżmy, że $f\colon [0,1] \to [0,1]$ jest funkcją spełniającą dla dowolnych $x, y \in [0.1]$ nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|.$$

Pokazać, że wówczas f ma dokładnie jeden punkt stały, tj. istnieje dokładnie jedno $x_0 \in [0,1]$ takie, że $f(x_0) = x_0$.

Zadanie 3. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich spełniającym $a_n \neq 1$ dla każdego n. Pokazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, to wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

Zadanie 4. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ i $\{b_n\}_{n\geqslant 0}$ będą ciągami liczb rzeczywistych dodatnich takimi, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^n = b$ dla $a, b > 0$. Załóżmy, że p i q są dodatnie oraz $p+q = 1$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$