Analiza Matematyczna I.1, semestr zimowy 2018 – zadania na ćwiczenia 2 października

Michał Kotowski

Zadanie 1 (Nierówności pomiędzy średnimi)**.** Udowodnić dla dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ nierówności

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zadanie 2. Udowodnić dla $n \geqslant 2$ nierówność

$$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Zadanie 3 (Nierówność Cauchy'ego-Schwarza)**.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kiedy w powyższej nierówności zachodzi równość?

Zadanie 4. Niech $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$, $k = 0, \ldots, n$, będzie współczynnikiem dwumianowym. Udowodnić nierówność

$$\sqrt{\binom{n}{1}} + \sqrt{\binom{n}{2}} + \ldots + \sqrt{\binom{n}{n}} \leqslant \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

Zadanie 5. Dla ustalonych nieujemnych liczb $x_1, \ldots, x_k$ określamy

$$a_n = \frac{x_1^n + \cdots + x_k^n}{k}.$$

(a) Udowodnij, że ciąg a_n jest logarytmicznie wypukły (log-wypukły), czyli spełnia nierówność $a_i^2 \leqslant a_{i-1} a_{i+1}$.

(b) Udowodnij, że ciąg $b_n = \sqrt[n]{a_n}$ jest rosnący, w szczególności dla $0 < p \leqslant q$, $p, q \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + \cdots + x_k^p}{k}} \leqslant \sqrt[q]{\frac{x_1^q + \cdots + x_k^q}{k}}.$$