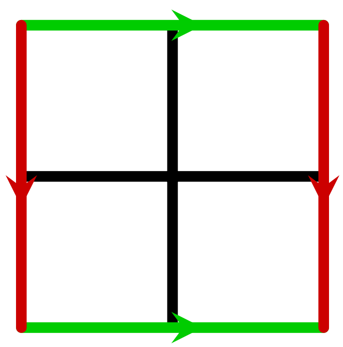
Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny

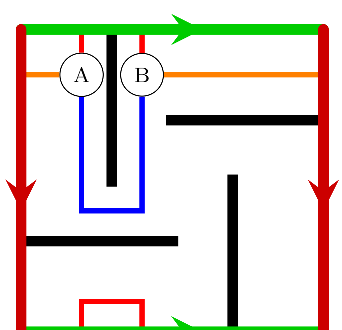
„W krainie Snake'a"

Michał Miśkiewicz, 6 maja 2020 roku

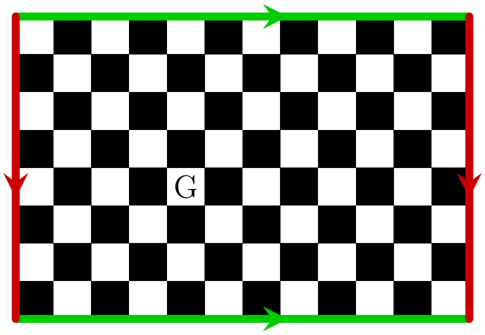
1. Rozważmy planszę jak na poniższym rysunku – bez obramowania, ale z nieprzekraczalnymi murami, poziomym i pionowym (zaznaczonymi na czarno). Jaki kształt ma ta plansza z perspektywy Snake'a?



2. Poniższa plansza ma taki kształt jak w poprzednim zadaniu, ale z czterema przeszkodami (w kolorze czarnym), jak w jednej z oryginalnych wersji gry. Która z trzech zaznaczonych dróg z A do B jest najkrótsza (czerwona, niebieska czy pomarańczowa)?

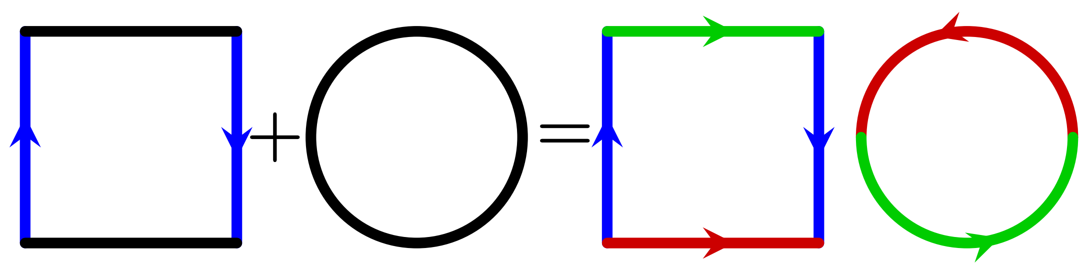


3. Na torusie narysowano szachownicę o wymiarach 8×12, a następnie na polu oznaczonym literą G postawiono gońca. Które pola są w zasięgu jego pojedynczego ruchu?



4. ($\star$) Krzywa ograniczająca *wstęgę Möbiusa* to okrąg, tylko zawęźlony. Koło również jest ograniczone przez okrąg. Co powstanie, jeśli skleimy wstęgę Möbiusa i koło wzdłuż brzegu?

   Można to pytanie uściślić, zaczynając od osobnych diagramów dla wstęgi Möbiusa i koła, a następnie wprowadzając dwie strzałki oznaczające sklejenie (zielona strzałka z zieloną, czerwona z czerwoną).

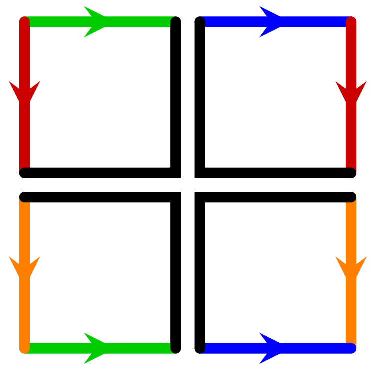


Wstęga Möbiusa Koło

5. Na wykładzie wspomniane zostały pewne paradoksalne skutki *nieorientowalności* w naszym trójwymiarowym świecie (pismo wspak, odwrotne zachowanie śrub etc.). Proszę wymyślić trzy własne przykłady dziwnych rzeczy, których mógłby doświadczyć podróżnik, gdyby po powrocie do domu odkrył, że ma inną orientację niż ci, którzy zostali.

Odpowiedzi

Zadanie 1 – odpowiedź. Dla uściślenia przyjmijmy, że mur jest nieprzekraczalny w żaden sposób, czyli że np. pukanie z jednej strony nie jest słyszalne z drugiej. Wówczas z perspektywy Snake'a plansza jest równoważna poniższej, w której cztery narożniki są połączone jedynie poprzez kolorowe strzałki (dla jasności dodano dwa nowe kolory).

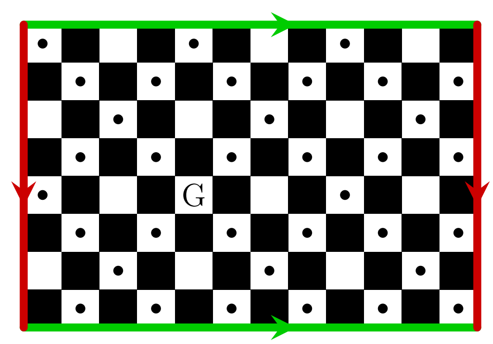


Żeby skleić te narożniki, wystarczy je odpowiednio przesunąć – w efekcie powstaje kwadrat z obramowaniem.

Można też postąpić w odwrotnej kolejności – najpierw skleić wyjściowy diagram, otrzymując torus z murem wyznaczającym dwa okręgi, a następnie rozciąć wzdłuż tych okręgów, otrzymując kwadrat.

Zadanie 2 – odpowiedź. Oczywiście najkrótsza jest czerwona droga, mimo że dwukrotnie przekracza brzeg diagramu.

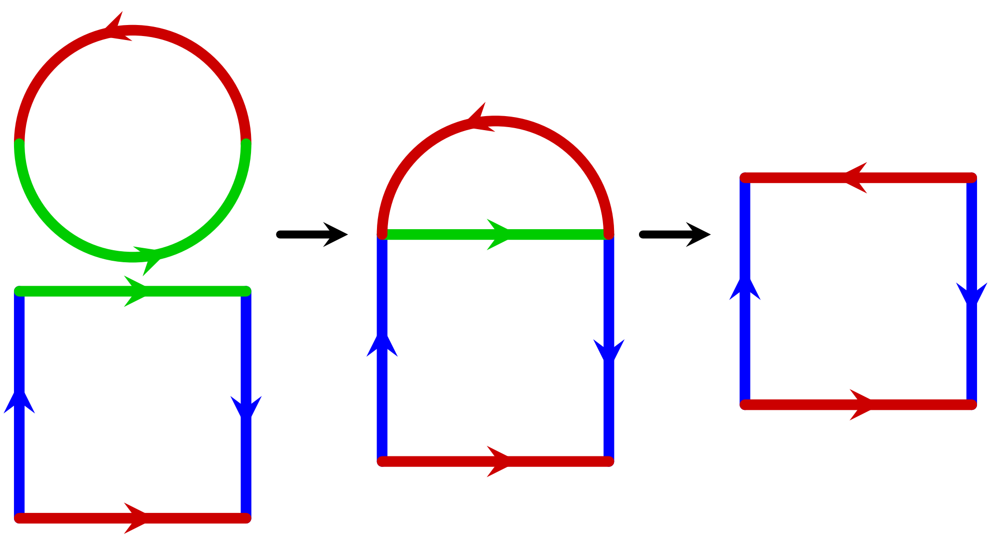
Zadanie 3 – odpowiedź. Na rysunku poniżej dostępne pola zaznaczono kropką.



Dla wyjaśnienia przypomnijmy, że goniec w ramach swojego ruchu wybiera jeden z czterech wektorów $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$, a następnie wybraną liczbę razy przesuwa się o ten wektor. Oczywiście nie może w ten sposób wejść na żadne czarne pole, ale w swoim zasięgu ma $3/4$ białych pól (jeśli liczyć pole startowe). Może to wymagać przekroczenia brzegu diagramu, i to wielokrotnie w ramach jednego ruchu.

Zadanie 4 – odpowiedź. O ile uznamy, że „kształt” pozostaje niezmieniony przy drobnych zgnieceniach, to wynikiem tego sklejenia jest płaszczyzna rzutowa. Nie będziemy tu formalizować opisu owych dopuszczalnych przekształceń; w matematyce służy do tego pojęcie *homeomorfizmu*.

Aby to zobaczyć, rozłóżmy sklejenie na dwa kroki. W piewszym zdeformujmy koło do półkola i sklejmy zieloną średnicę tego półkola z zielonym bokiem kwadratu. W drugim kroku możemy zapomnieć o zielonej strzałce i zdeformować „wydęty kwadrat” do normalnego kwadratu. Jako rezultat otrzymujemy płaszczyznę rzutową.
Co prawda na rysunku z wykładu górna strzałka wskazywała w prawo, a dolna w lewo, ale oba warianty opisują to samo sklejenie.



Zadanie 5 – odpowiedź. Mam nadzieję, że to pytanie pobudziło Waszą wyobraźnię. Nie ma jednej poprawnej odpowiedzi!