

Potok przekształceń harmonicznych

(wykład monograficzny, semestr zimowy 2021/2022)

Michał Miśkiewicz

Założenia (opisowo)

Wykład zakłada wiedzę ze *Wstępu do równań różniczkowych cząstkowych* (w tym podstawowe informacje o słabych pochodnych) oraz kursu *Analizy matematycznej II.1* i *II.2*. Pomocna będzie też podstawowa znajomość geometrii różniczkowej i analizy funkcjonalnej.

Skrócony opis

Równanie ciepła jest najbardziej znanym przykładem problemu parabolicznego. Potok przekształceń harmonicznych stanowi przeniesienie tego problemu na grunt geometryczny – zamiast funkcji rzeczywistych rozpatrujemy funkcje o wartościach w ustalonej rozmaitości, np. w dwuwymiarowej sferze. Potok przekształceń harmonicznych można wówczas zdefiniować – w analogii do równania ciepła – jako potok gradientowy energii Dirichleta, czyli całki z kwadratu normy różniczki.

Ze względu na geometryczne więzy powstałe równanie jest nieliniowe, a sama teoria istnienia i regularności rozwiązań sprawia już duże trudności. Prześledzimy zarówno te podstawowe zagadnienia, jak również fenomen powstawania osobliwości oraz rolę geometrii rozmaitości obranej jako przeciwdziedzina.

Pełny opis

Tempo i dokładny zakres wykładu zostaną dopasowane do możliwości uczestników. Ćwiczenia będą miały częściowo charakter seminaryjny i poświęcone będą m.in. pojęciom geometrycznym i narzędziom analitycznym odgrywającym rolę w tej dziedzinie.

Na wykładzie poruszone zostaną następujące zagadnienia:

- Klasyczne równanie ciepła i jakościowe właściwości jego rozwiązań. Motywacja uogólnień na przypadek rozmaitości.
- Uzupełnienie wiedzy z geometrii różniczkowej (rozmaitości Riemanna, podrozmaitości przestrzeni euklidesowej, twierdzenie o otoczeniu tubularnym, druga forma podstawowa, operator Laplace'a na rozmaitościach).
- Informacja o przekształceniach harmonicznych między rozmaitościami.
- Klasyczna teoria nieliniowych równań parabolicznych (w skrócie).
- Zastosowanie klasycznej teorii dla potoku przekształceń harmonicznych w rozmaitość o niedodatniej krzywiznie sekcyjnej.
- Potok przekształceń harmonicznych w wymiarze 2 i zjawisko bąblowania.
- Konstrukcja potoku przekształceń harmonicznych oparta na metodzie Ginzburga-Landaua. Charakteryzacja zbioru osobliwego.
- Informacje na temat innych problemów ewolucyjnych pochodzenia geometrycznego.

Literatura

Monografia:

F. LIN AND C. WANG. *The analysis of harmonic maps and their heat flows*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.

Oryginalne prace:

J. EELLS, JR. AND J. H. SAMPSON. *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.

Y. M. CHEN AND M. STRUWE. *Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps*. *Math. Z.*, 201(1):83–103, 1989.

J. CHEEGER, R. HASLHOFER, AND A. NABER. *Quantitative stratification and the regularity of harmonic map flow*. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 53(1-2):365–381, 2015.