

Zadanie 2 z egzaminu AM II.2 (II termin)

Michał Miśkiewicz

3 września 2025

Zadanie 2. Wykazać, że miara powierzchniowa wykresu funkcji

$$F: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (x^2 + 2x, y^2 - 4y)$$

jest nie większa niż 15.

Rozwiązanie. Wykresem funkcji F jest zbiór par postaci $(z, F(z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dla wszystkich $z \in (0, 1) \times (0, 1)$, a więc przy standardowym utożsamieniu jest to zbiór

$$\Gamma = \{(x, y, x^2 + 2x, y^2 - 4y) : x, y \in (0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Jest jasne, że Γ jest 2-wymiarową rozmaitością parametryzowaną przez gładką funkcję

$$G: (0, 1)^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad G(x, y) = (x, y, x^2 + 2x, y^2 - 4y).$$

W celu wyznaczenia miary powierzchniowej Γ obliczymy najpierw wyznacznik Grama:

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x + 2 & 0 \\ 0 & 2y - 4 \end{pmatrix},$$

$$DG(x, y)^T DG(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + (2x + 2)^2 & 0 \\ 0 & 1 + (2y - 4)^2 \end{pmatrix},$$

$$\det(DG(x, y)^T DG(x, y)) = (1 + (2x + 2)^2)(1 + (2y - 4)^2).$$

Zgodnie z definicją, miara powierzchniowa Γ jest równa

$$\begin{aligned} \sigma_2(\Gamma) &= \int_{(0,1)^2} \sqrt{\det(DG(x, y)^T DG(x, y))} \, d\lambda_2(x, y) \\ &= \int_{(0,1)^2} \sqrt{(1 + (2x + 2)^2)(1 + (2y - 4)^2)} \, d\lambda_2(x, y). \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Fubiniego, uzyskujemy

$$\begin{aligned}\sigma_2(\Gamma) &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(1 + (2x + 2)^2)(1 + (2y - 4)^2)} \, dx \, dy \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{1 + (2x + 2)^2} \, dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \sqrt{1 + (2y - 4)^2} \, dy \right).\end{aligned}$$

Obie całki można szacować w ten sam sposób. Tak naprawdę mają one tę samą wartość, o czym łatwo się przekonać, stosując naturalne podstawienia (za $2x + 2$ w pierwszej i za $2y - 4$ w drugiej z nich), lub też bezpośrednio podstawienie $x + y = 1$. Skupimy się więc na ograniczeniu z góry całki $\int_0^1 \sqrt{1 + (2x + 2)^2} \, dx$. Wskażę kilka różnych sposobów różniących się poziomem naturalności (lub też wymaganej pomysłowości) oraz potrzebnym nakładem pracy.

Uwaga. Kusząca wydaje się możliwość wyznaczenia tej całki bezpośrednio, np. przez jedno z tzw. podstawień Eulera. Prowadzi to do wyniku

$$\left(\sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4 + \sqrt{17}}{2 + \sqrt{5}} \right) \right)^2 \approx 10,035 < 15.$$

Jednak otrzymanie przybliżonej wartości otrzymanego wyrażenia (bez użycia kalkulatora) nie wydaje się łatwiejsze od wyjściowego zadania przybliżenia całki.

SPOSÓB I. Skorzystamy z nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $t \mapsto t^2$ (lub też nierówności Cauchy’ego-Schwarza, która w tym przypadku daje to samo):

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 \sqrt{1 + (2x + 2)^2} \, dx \right)^2 &\leq \int_0^1 \left(\sqrt{1 + (2x + 2)^2} \right)^2 \, dx \\ &= \int_0^1 (1 + (2x + 2)^2) \, dx \\ &= 12\frac{1}{3} < 15.\end{aligned}$$

□

SPOSÓB II. Oszacujmy $1 + (2x + 2)^2$ z góry przez kwadrat pewnego wyrażenia liniowego. Łatwo się przekonać, że dla $x \in (0, 1)$ zachodzi nierówność $1 + (2x + 2)^2 \leq (2x + 3)^2$, co daje

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x + 2)^2} \, dx \leq \int_0^1 (2x + 3) \, dx = 4.$$

Niestety $4^2 = 16 > 15$, więc potrzeba lepszego oszacowania. Zauważmy więc, że zachodzi również $1 + (2x + 2)^2 \leq (2x + \frac{5}{2})^2$, w konsekwencji

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (2x + 2)^2} \, dx \leq \int_0^1 (2x + \frac{5}{2}) \, dx = \frac{7}{2}.$$

W kwadracie otrzymujemy teraz oszacowanie przez $\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4} < 15$. $\square$

Uwaga. Wśród oszacowań tego typu optymalnym jest $1 + (2x + 2)^2 \leq (2x + \sqrt{5})^2$, co prowadzi do ostatecznego oszacowania przez liczbę $(1 + \sqrt{5})^2 \approx 10,47$.

SPOSÓB III. Oszacujmy $1 + (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 5$ z góry przez pewne wyrażenie liniowe. Ponieważ na przedziale $(0, 1)$ mamy $x^2 \leq x$, otrzymujemy $1 + (2x + 2)^2 \leq 12x + 5$, co daje

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + (2x + 2)^2} dx &\leq \int_0^1 \sqrt{12x + 5} dx \\ &= \frac{1}{18} (12x + 5)^{3/2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{18}. \end{aligned}$$

Pozostaje porównać otrzymane oszacowanie z tym z zadania. Zrobimy to bezpośrednio, przekształcając równoważnie tezę:

$$\begin{aligned} \left(\frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{18} \right)^2 &\leq 15 \\ 17^3 - 2 \cdot 17^{3/2} \cdot 5^{3/2} + 5^3 &\leq 15 \cdot 18^2 \\ 89 &\leq 17^{3/2} \cdot 5^{3/2} \\ 89^2 &\leq 85^3 \\ 7921 &\leq 614125. \end{aligned}$$

Prawdziwość ostatniej nierówności potwierdza, że otrzymane ograniczenie pociąga za sobą tezę zadania. $\square$

Uwaga. Metoda wyżej daje oszacowanie przez liczbę $\left(\frac{17^{3/2} - 5^{3/2}}{18} \right)^2 \approx 10,71$.