

Zadanie 2 z egzaminu AM II.2 (I termin)

Michał Miśkiewicz

7 czerwca 2025

Zadanie 2. Każdy punkt elipsy

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x + z = 1\}$$

został połączony odcinkiem z punktem $(0, 0, 0)$. Rozmaitość M jest sumą tych odcinków (bez końców). Obliczyć całkę powierzchniową $\int_M \sqrt{x + 3z} d\sigma_2(x, y, z)$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie składa się z trzech głównych kroków:

1. znalezienie parametryzacji φ powierzchni M (3p);
2. obliczenie wyznacznika Grama dla φ (4p);
3. wyznaczenie zadanej całki powierzchniowej (3p).

W nawiasie zaznaczyłem, ile punktów przyznawano za każdy z nich.

Krok 1. Do parametryzacji E można wykorzystać standardową parametryzację okręgu jednostkowego $\alpha \mapsto (\cos \alpha, \sin \alpha)$ poprzez wyznaczenie $z = 1 - x$:

$$\gamma(\alpha) := (\cos \alpha, \sin \alpha, 1 - \cos \alpha).$$

Dla ustalonego punktu $p \in E$ odcinek łączący p z $\mathbf{0}$ możemy parametryzować funkcją $t \mapsto (1 - t) \cdot \mathbf{0} + t \cdot p$, co w połączeniu z powyższym daje

$$\varphi(t, \alpha) = t \cdot \gamma(\alpha) = (t \cos \alpha, t \sin \alpha, t(1 - \cos \alpha)).$$

Jeśli za dziedzinę φ przyjmimy $(0, 1) \times (0, 2\pi)$, to w obrazie znajdzie się cała powierzchnia M z wyłączeniem odcinka łączącego $(1, 0, 0)$ z $(0, 0, 0)$ – jest to jednak zbiór zerowej miary powierzchniowej, więc możemy go pominąć przy obliczaniu całki. Pozostaje przekonać się, że φ

jest parametryzacją. Łatwo przekonać się, że jest to bijekcja klasy C^1 oraz $D\varphi$ ma pełny rząd (co zresztą wynika z obliczeń z punktu 2), więc trzeba tylko uzasadnić homeomorficzność.

SPOSÓB I. Wskażemy odwrotność φ . Ponieważ wartość t można wyliczyć ze wzoru $t = x + z$, więc $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ otrzymujemy jako $(x, y)/t$. Znanym faktem jest, że standardowa parametryzacja okręgu jednostkowego posiada odwrotność (nazwijmy ją a na cześć funkcji arcus (co-)tangens). Po połączeniu tych obserwacji otrzymujemy funkcję klasy C^1

$$(x, y, z) \mapsto \left(x + z, a \left(\frac{(x, y)}{x + z} \right) \right)$$

i nie jest trudno się przekonać, że istotnie jest to odwrotność φ . □

SPOSÓB II. Funkcję φ możemy przedłużyć tym samym wzorem do ciągłej funkcji na zwartym zbiorze $[0, 1] \times [0, 2\pi]$. To przedłużenie $\bar{\varphi}$ nie jest już co prawda bijekcją, ale spełnia warunek

$$\bar{\varphi}(t_1, \alpha_1) = \bar{\varphi}(t_2, \alpha_2) \implies (t_1, \alpha_1) = (t_2, \alpha_2) \text{ lub } t_1, t_2 = 0 \text{ lub } \alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 2\pi\}.$$

Standardowy lemat topologiczny (zob. zadanie 6.6 [wśród zadań na mojej stronie](#)) mówi nam, że w takim razie $\bar{\varphi}$ jest homeomorfizmem na swój obraz, więc φ tym bardziej.

Krok 2. Obliczamy macierz różniczkową φ :

$$D\varphi(t, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -t \sin \alpha \\ \sin \alpha & t \cos \alpha \\ 1 - \cos \alpha & t \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Następnie strategie obliczeniowe są co najmniej dwie:

SPOSÓB I. Obliczamy wprost:

$$\begin{aligned} D\varphi^T D\varphi &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2 & t \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \\ t \sin \alpha (1 - \cos \alpha) & t^2 \sin^2 \alpha + t^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (1 - \cos \alpha)^2 & t \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \\ t \sin \alpha (1 - \cos \alpha) & t^2 (1 + \sin^2 \alpha) \end{pmatrix} \\ \det(D\varphi^T D\varphi) &= (1 + (1 - \cos \alpha)^2) \cdot t^2 (1 + \sin^2 \alpha) - t^2 \sin^2 \alpha (1 - \cos \alpha)^2 \\ &= t^2 (1 + \sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2) \\ &= t^2 (1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1) \\ &= t^2 (3 - 2 \cos \alpha). \end{aligned}$$

SPOSÓB II. Skorzystamy ze wzoru Cauchy'ego–Bineta:

$$\begin{aligned}
\det(D\varphi^T D\varphi) &= \det^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha & -t \sin \alpha \\ \sin \alpha & t \cos \alpha \end{pmatrix} + \det^2 \begin{pmatrix} \cos \alpha & -t \sin \alpha \\ 1 - \cos \alpha & t \sin \alpha \end{pmatrix} \\
&\quad + \det^2 \begin{pmatrix} \sin \alpha & t \cos \alpha \\ 1 - \cos \alpha & t \sin \alpha \end{pmatrix} \\
&= (t \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha)^2 + (t \sin \alpha \cos \alpha + t \sin \alpha (1 - \cos \alpha))^2 \\
&\quad + (t \sin^2 \alpha - t \cos \alpha (1 - \cos \alpha))^2 \\
&= t^2 + t^2 \sin^2 \alpha + t^2 (1 - \cos \alpha)^2 \\
&= t^2 (1 + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1) \\
&= t^2 (3 - 2 \cos \alpha).
\end{aligned}$$

Krok 3. Po podstawieniu $(x, y, z) = \varphi(t, \alpha)$ w miejsce $\sqrt{x + 3z}$ otrzymujemy

$$\sqrt{t \cos \alpha + 3t(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{t(3 - 2 \cos \alpha)},$$

co dziwnym trafem pozwala na znaczące uproszczenie badanej całki. Pomijając zbiór miary zero (odcinek wspomniany wcześniej) i wykorzystując twierdzenie Fubiniego (mamy do czynienia z dodatnimi funkcjami ciągłymi), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\int_M \sqrt{x + 3z} \, d\sigma_2(x, y, z) &= \int_{M \setminus \text{odcinek}} \sqrt{x + 3z} \, d\sigma_2(x, y, z) \\
&= \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} \sqrt{t(3 - 2 \cos \alpha)} \cdot \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)} \, d\lambda_2(t, \alpha) \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 t^{3/2} (3 - 2 \cos \alpha) \, dt \, d\alpha \\
&= \left(\int_0^1 t^{3/2} \, dt \right) \left(\int_0^{2\pi} (3 - 2 \cos \alpha) \, d\alpha \right) \\
&= \frac{2}{5} \cdot (3 \cdot 2\pi - 2 \cdot 0) = \frac{12}{5} \pi.
\end{aligned}$$