# Modele matematyczne drapieżnictwa

**Dariusz WRZOSEK**
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

**BIOFIZMAT, Grudzień 2015**

Podstawowe oddziaływania międzygatunkowe w ekologii
- konkurencja
- mutualizm
- drapieżnictwo
- pasożytnictwo

# Odpowiedź funkcjonalna Hollinga

-$d$ -odległość reakcji
-$T_s$ - czas poszukiwania ofiar
-$V$- prędkość przemieszczania się drapieżnika
-$a$ - efektywność ataków
-$T_h$- "handling time"
Liczba schwytanych ofiar w czasie poszukiwań $T_s$

$$\overbrace{(a2dV\,v)}^{\text{czest.spotk.}}\,T_s$$

Liczba ofiar zjedzonych w jedn. czasu

$$F(v) = \frac{a2dVT_s v}{T_s + 2adVT_s vT_h} = \frac{(2adV)v}{1 + (2adVT_h)v}\,.$$

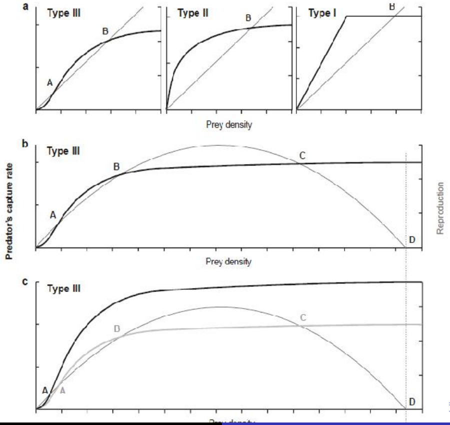
Funkcja Hollinga II typu (1952)

# Najprostszy model drapieżnik-ofiara

$v(t)$—zagęszczenie populacji ofiar,

$$\frac{dv}{dt} = rv(1 - \frac{v}{k}) - F(v)U\,.$$

$U$ stałe zagęszczenie drapieżnika



# Optymalizacja prędkości poruszania się drapieżnika

# Modele drapieżnik -ofiara (dynamika obu populacji)

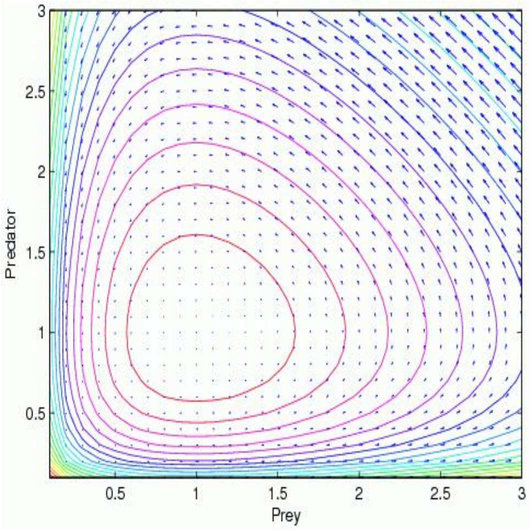
Pierwsze modele matematyczne
Lotka- Volterra (1925-6), Kołmogorow (1936), Gause (1935)
Hasło ”predator-prey” wpisane w MathSciNet daje 2850 pozycji

# Model Lotki-Volterry

a

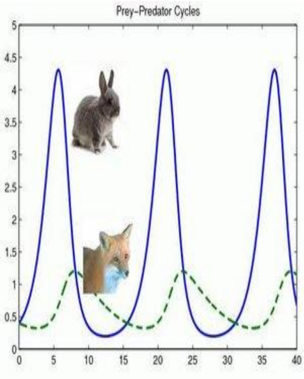
$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -du + cbvu \\ \frac{dv}{dt} &= rv - bvu\,, \end{aligned}$$

# Model Lotki-Volterry




źródło:Frank Hoppensteadt (2006), Scholarpedia, 1(10):1563

# Model Lotki-Volterry




źródło:Frank Hoppensteadt (2006), Scholarpedia, 1(10):1563

# Paradoks pestycydów

$v$ ofiara (owad, szkodnik upraw) , $u$ drapieżnik (owad)
Stan stacjonarny $(\bar{u}, \bar{v})$:

$$\bar{u} = \int_0^T u(t)dt = \frac{r}{b},$$

$$\bar{v} = \int_0^T v(t)dt = \frac{d}{cb}.$$

w wyniku działania pestycydów rośnie $d$ i maleje $r$.

# Uogólnienie modelu Lotki Volterry

Model Gause-go (1935) i Rosenzweiga-McArthura (1963)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -du + cF(v)u\,, \\ \frac{dv}{dt} &= R(v) - F(v)u\,, \end{aligned}$$

wzrost logistyczny :

$$R(v) = rv(1 - v/k)$$

F(v)–odpowiedź funkcjonalna (Holling 1959) liczba ofiar

zjadanych w jednostce czasu przez jednego drapieżnika przy zagęszczeniu ofiar $v$. Dla klasycznego modelu Lotki-Volterry mamy zatem $F(v) = bv$

# Uogólnienie modelu Lotki Volterry

Model Gause-go (1935) i Rosenzweiga-McArthura (1963)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -du + cF(v)u\,, \\ \frac{dv}{dt} &= R(v) - F(v)u\,, \end{aligned}$$

wzrost logistyczny :

$$R(v) = rv(1 - v/k)$$

F(v)–odpowiedź funkcjonalna (Holling 1959) liczba ofiar zjadanych w jednostce czasu przez jednego drapieżnika przy zagęszczeniu ofiar $v$. Dla klasycznego modelu Lotki-Volterry mamy zatem $F(v) = bv$

# Uogólnienie modelu Lotki Volterry

Model Gause-go (1935) i Rosenzweiga-McArthura (1963)

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -du + cF(v)u\,, \\ \frac{dv}{dt} &= R(v) - F(v)u\,, \end{aligned}$$

wzrost logistyczny :

$$R(v) = rv(1 - v/k)$$

F(v)–odpowiedź funkcjonalna (Holling 1959) liczba ofiar

zjadanych w jednostce czasu przez jednego drapieżnika przy zagęszczeniu ofiar $v$. Dla klasycznego modelu Lotki-Volterry mamy zatem $F(v) = bv$

# Bifurkacja Hopfa-cykle graniczne

Bifurkacji Hopfa-utrata stabilności punktu krytycznego typu ognisko, przy pewnej krytycznej wartości parametru bifurkacyjnego powoduje pojawienie się cyklu granicznych wokół tego punktu

limitcycle.jpg

źródło:Van der Hoff et al. S. Afr. J. Sci.(2013)

# Cykle graniczne

K.-S. Cheng, Uniqueness of a limit cycle for predator-prey system, SIAM J. Math. Anal. (1981)

J. Hofbauer, J.W So, Multiple limit cycles for predator-prey models, Math. Biosci.(1990)

D.W, Limit cycles in predator-prey models, Math. Biosci. (1990)

# Model Hollinga-Tannera

# Współdziałanie drapieżników

# Populacja ze strukturą i selekcja

# Model z Am Nat

# Układ drapieżnik -ofiara z migracją (dyfuzją)

E. Conway, J.A. Smoller, Diffusion and the predator-prey interactions, SIAM J. Appl Math (1977)
$u\,,v:\Omega\times(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_t &= d_u\Delta u - du + cF(v)u\,, \\ v_t &= d_v\Delta v + R(v) - F(v)u\,, \end{aligned}$$

$u_\nu(x,t) = v_\nu(x,t) = 0$ dla $x\in\partial\Omega$ i $t>0$
( $\nu$ -zewnętrzny normalny do brzegu $\partial\Omega$ )

Keller-Segel J. Theor. Biology (1970)

$$\begin{aligned} u_t = &\quad d_u \Delta u &\quad -div(\chi u \nabla w), \\ w_t = &\quad d_w \Delta w &\quad -w + \alpha u \end{aligned}$$

$u_\nu(x,t) = v_\nu(x,t) = 0$ dla $x \in \partial\Omega$ i $t > 0$

# układ drapieżnik -ofiara z migracją i taksją w kierunku ofiar

Kareiva P, Odell G. (1987) Swarms of predators exhibit preytaxis if individual predators use are-restricted search. Am Nat 130: 233-270
J. M Lee, T. Hillen, M. Lewis(2009) Pattern formation in prey-taxis systems. J Biol Dyn 3: 551-573
Wang X, Wang W, Zhang G (2015) Global bifurcation of solutions for a predator-prey model with prey-taxis. Math. Meth in Appl Math
Aiseba B, Bendahmane M, Noussair A (2008) A reaction-diffusion system modeling predator-prey with prey-taxis. Nonlinear Anal.RWA

$$
\begin{aligned}
u_t &= d_u \Delta u + \div(\chi \nabla v) - du + cF(v)u\,, \\
v_t &= d_v \Delta v + R(v) - F(v)u\,,
\end{aligned}
$$

# układ drapieżnik -ofiara z migracją i chemotaksją I

J.I Tello, D.W

$$
\begin{aligned}
u_t &= d_u \Delta u - div(\chi u \nabla w),\\
w_t &= d_w \Delta w - \mu w + \alpha v f(u),\\
v_t &= \lambda r(1 - \tfrac{v}{K}) - v f(u),
\end{aligned}
$$

J.I Tello, D.W

$$
\begin{aligned}
u_t &= d_u \Delta u - div(\chi u \nabla w),\\
w_t &= d_w \Delta w - \mu w + \alpha v,\\
v_t &= \lambda r(1 - \tfrac{v}{K}) - v f(u),
\end{aligned}
$$