KU LEUVEN

Grafy kwantowe

Mateusz Wasilewski
KU Leuven (postdok FWO)
21 maja 2021

0 Ogólny plan

1. Nieprzemienna matematyka
2. Grafy kwantowe
3. Losowe grafy kwantowe

1. Nieprzemienna matematyka
2. Grafy kwantowe
3. Losowe grafy kwantowe

1 Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

1 Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Heisenberg

Współrzędne: operatory położenia i pędu p i q.

1 Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Heisenberg

Współrzędne: operatory położenia i pędu p i q.
Zasada nieoznaczoności Heiseberga: $[p, q] = i\hbar$ $\rightsquigarrow$ współrzędne na kwantowej przestrzeni fazowej nie komutują.

1 Mechanika klasyczna a kwantowa

Klasyczna przestrzeń fazowa

Współrzędne: położenie i pęd $\rightsquigarrow$ interesujące wielkości to funkcje tych dwóch zmiennych.

Heisenberg

Współrzędne: operatory położenia i pędu p i q.
Zasada nieoznaczoności Heiseberga: $[p, q] = i\hbar$ $\rightsquigarrow$ współrzędne na kwantowej przestrzeni fazowej nie komutują.

Jakiego typu struktura powinna zastąpić klasyczną przestrzeń fazową?

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie?

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- $\mathrm{B}(\mathsf{H})$;

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- $\mathrm{B}(\mathsf{H})$;
- $M_n \simeq B(\mathbb{C}^n)$;

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- $\mathrm{B}(\mathsf{H})$;
- $M_n \simeq B(\mathbb{C}^n)$;
- $C(X) \subset \mathrm{B}(L^2(X,\mu))$, gdzie X jest zwarta.

1 Algebry operatorów

Mechanika kwantowa $\rightsquigarrow$ operatory na przestrzeni Hilberta. Wszystkie? Niekoniecznie, ale potrzebujemy trochę struktury $\rightsquigarrow$ C^*-algebry:

- przestrzeń liniowa zamknięta ze względu na mnożenie (składanie) operatorów, czyli podalgebra (dzisiaj: z jedynką);
- zamknięta ze względu na sprzężenie hermitowskie;
- domknięta w normie operatorowej.

Ważne przykłady:

- $\mathrm{B}(\mathsf{H})$;
- $\boxed{M_n \simeq B(\mathbb{C}^n)}$;
- $C(X) \subset \mathrm{B}(L^2(X, \mu))$, gdzie X jest zwarta.

Jak zdefiniować klasyczne pojęcia topologii/geometrii w tym kontekście?

1 Słownik

Zwarta przestrzeń X	C^*-algebra $C(X)$
X – skończona	$C(X)$ – skończenie wymiarowa
Miara probabilistyczna μ	dodatni funkcjonał φ taki, że $\varphi(\mathbb{1}) = 1$
funkcja ciągła $f : X \to Y$	$*$-homomorfizm $\Phi : C(Y) \to C(X)$
domknięty podzbiór $Y \subset X$	domknięty ideał $I := \{f \in C(X) : f_{\mid Y} = 0\}$
podzbiór otwarto-domknięty $Y \subset X$	samosprzężony idempotent $\mathbb{1}_Y$
suma rozłączna $X \sqcup Y$	suma prosta $C(X) \oplus C(Y)$
produkt kartezjański $X \times Y$	iloczyn tensorowy $C(X) \otimes C(Y)$
drugi aksjomat przeliczalności	ośrodkowość
wiązka wektorowa	skończenie generowany, projektywny moduł
topologiczna K-teoria	topologiczna K-teoria :)
mnożenie $m : X \times X \to X$	komnożenie $\Delta : C(X) \to C(X) \otimes C(X)$
graf (V, E)	?

KU LEUVEN

2 Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$.

2 Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$. To oznacza, że E jest relacją na zbiorze V. Jeśli graf jest nieskierowany, to relacja ta jest symetryczna $\rightsquigarrow$ potrzebny jest nieprzemienny odpowiednik relacji.

KU LEUVEN

2 Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$. To oznacza, że E jest relacją na zbiorze V. Jeśli graf jest nieskierowany, to relacja ta jest symetryczna $\rightsquigarrow$ potrzebny jest nieprzemienny odpowiednik relacji.

Z drugiej strony, graf można również opisać za pomocą macierzy sąsiedztwa $A : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$. W jaki sposób można to wyrazić abstrakcyjnie?

2 Czym właściwie są grafy?

Graf (V, E) to skończony zbiór wierzchołków V i zbiór krawędzi $E \subset V \times V$. To oznacza, że E jest relacją na zbiorze V. Jeśli graf jest nieskierowany, to relacja ta jest symetryczna $\rightsquigarrow$ potrzebny jest nieprzemienny odpowiednik relacji.

Z drugiej strony, graf można również opisać za pomocą macierzy sąsiedztwa $A : \mathbb{C}^V \to \mathbb{C}^V$. W jaki sposób można to wyrazić abstrakcyjnie?

Pierwszy krok jest jasny – musimy zastąpić zbiór V skończenie wymiarową C^*-algebrą. Skupimy się na przypadku algebry macierzowej M_n.

2 Kwantowe relacje?

Klasyczna relacja E na zbiorze V to po prostu podzbiór $E \subset V \times V$.

2 Kwantowe relacje?

Klasyczna relacja E na zbiorze V to po prostu podzbiór $E \subset V \times V$. Zgodnie z naszym słownikiem $V \times V$ powinniśmy zastąpić iloczynem tensorowym $M_n \otimes M_n$, natomiast podzbiór (otwarto-domknięty) to samosprzężony idempotent $P \in M_n \otimes M_n$, czyli element spełniający $P = P^2 = P^*$.

2 Kwantowe relacje?

Klasyczna relacja E na zbiorze V to po prostu podzbiór $E \subset V \times V$. Zgodnie z naszym słownikiem $V \times V$ powinniśmy zastąpić iloczynem tensorowym $M_n \otimes M_n$, natomiast podzbiór (otwarto-domknięty) to samosprzężony idempotent $P \in M_n \otimes M_n$, czyli element spełniający $P = P^2 = P^*$.

W związku z tym graf kwantowy to para (M_n, P). Graf jest nieskierowany, jeśli P jest tensorem symetrycznym.

2 Kwantowe relacje?

Klasyczna relacja E na zbiorze V to po prostu podzbiór $E \subset V \times V$. Zgodnie z naszym słownikiem $V \times V$ powinniśmy zastąpić iloczynem tensorowym $M_n \otimes M_n$, natomiast podzbiór (otwarto-domknięty) to samosprzężony idempotent $P \in M_n \otimes M_n$, czyli element spełniający $P = P^2 = P^*$.

W związku z tym graf kwantowy to para (M_n, P). Graf jest nieskierowany, jeśli P jest tensorem symetrycznym.

Ta definicja jest dość naiwna i trudno się z nią pracuje, ale jest dobrym punktem wyjścia do dalszych rozważań.

2 Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony.

2 Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

2 Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

Jeśli $P \in M_n \otimes M_n$ jest rzutem, to odwzorowanie $T_P : M_n \to M_n$ jest projekcją, której obraz oznaczymy przez S.
P symetryczny $\rightsquigarrow S = S^*$.

2 Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

Jeśli $P \in M_n \otimes M_n$ jest rzutem, to odwzorowanie $T_P : M_n \to M_n$ jest projekcją, której obraz oznaczymy przez S.
P symetryczny $\rightsquigarrow S = S^*$.
Gdy dodatkowo zażądamy, aby relacja P była zwrotna, to otrzymamy $\mathbb{1} \in S$.

2 Grafy kwantowe à la Weaver i Duan-Severini-Winter – systemy operatorowe

Każdy element $X \in M_n \otimes M_n$ zadaje odwzorowanie liniowe $T_X : M_n \to M_n$ przez mnożenie z lewej i prawej strony. Jeśli $X = a \otimes b$, to $T_X(c) := acb^T$ – transpozycja jest potrzebna, żeby odwzorowanie $X \mapsto T_X$ miało dobre własności.

Jeśli $P \in M_n \otimes M_n$ jest rzutem, to odwzorowanie $T_P : M_n \to M_n$ jest projekcją, której obraz oznaczymy przez S.
P symetryczny $\rightsquigarrow S = S^*$.
Gdy dodatkowo zażądamy, aby relacja P była zwrotna, to otrzymamy $\mathbb{1} \in S$. Podzbiór $S \subset M_n$ spełniający $S = S^*$ oraz $\mathbb{1} \in S$ nazywamy systemem operatorowym.

2 Klasyczne grafy jako systemy operatorowe

Niech (V, E) będzie klasycznym grafem nieskierowanym. Zdefiniujmy $S := \mathrm{span}\{e_{ij} : i \sim j \text{ lub } i = j\}$.

2 Klasyczne grafy jako systemy operatorowe

Niech (V, E) będzie klasycznym grafem nieskierowanym. Zdefiniujmy $S := \mathrm{span}\{e_{ij} : i \sim j \text{ lub } i = j\}$.

Dwa grafy (V_1, E_1) i (V_2, E_2) są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy systemy operatorowe S_1 i S_2 są izomorficzne (w odpowiednim sensie).

2 Kwantowa macierz sąsiedztwa (Musto-Reutter-Verdon)

Choi-Jamiołkowski

Jeśli $A : M_n \to M_n$ jest odwzorowaniem liniowym, to można z nim stowarzyszyć tensor $P_A := \frac{1}{n} \sum_{i,j} A(e_{ij}) \otimes e_{ij}$. Można myśleć o P_A jako o macierzy odwzorowania A. Co więcej, A jest całkowicie dodatnie dokładnie wtedy, gdy P_A jest dodatnio określony jako element $M_n \otimes M_n \simeq M_{n^2}$.

2 Kwantowa macierz sąsiedztwa (Musto-Reutter-Verdon)

Choi-Jamiołkowski

Jeśli $A : M_n \to M_n$ jest odwzorowaniem liniowym, to można z nim stowarzyszyć tensor $P_A := \frac{1}{n}\sum_{i,j} A(e_{ij}) \otimes e_{ij}$. Można myśleć o P_A jako o macierzy odwzorowania A. Co więcej, A jest całkowicie dodatnie dokładnie wtedy, gdy P_A jest dodatnio określony jako element $M_n \otimes M_n \simeq M_{n^2}$.

P_A jest rzutem dokładnie wtedy, gdy $\frac{1}{n}\sum_k A(e_{ik})A(e_{kj}) = A(e_{ij})$.
Symetria $P_A \rightsquigarrow \mathrm{Tr}((Ax)y) = \mathrm{Tr}(x(Ay))$.

2 Kwantowa macierz sąsiedztwa (Musto-Reutter-Verdon)

Choi-Jamiołkowski

Jeśli $A : M_n \to M_n$ jest odwzorowaniem liniowym, to można z nim stowarzyszyć tensor $P_A := \frac{1}{n}\sum_{i,j} A(e_{ij}) \otimes e_{ij}$. Można myśleć o P_A jako o macierzy odwzorowania A. Co więcej, A jest całkowicie dodatnie dokładnie wtedy, gdy P_A jest dodatnio określony jako element $M_n \otimes M_n \simeq M_{n^2}$.

P_A jest rzutem dokładnie wtedy, gdy $\frac{1}{n}\sum_k A(e_{ik})A(e_{kj}) = A(e_{ij})$.
Symetria $P_A \rightsquigarrow \mathrm{Tr}((Ax)y) = \mathrm{Tr}(x(Ay))$.

A będzie naszą kwantową macierzą sąsiedztwa.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.
- Graf d-regularny $\rightsquigarrow$ $D = d\mathbb{1}$.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.
- Graf d-regularny $\rightsquigarrow$ $D = d\mathbb{1}$.
- Laplasjan grafu $\rightsquigarrow$ kwantowy laplasjan $Lx := \frac{1}{2}(Dx + xD) - A(x)$ $\rightsquigarrow$ błądzenie losowe.

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.
- Graf d-regularny $\rightsquigarrow$ $D = d\mathbb{1}$.
- Laplasjan grafu $\rightsquigarrow$ kwantowy laplasjan $Lx := \frac{1}{2}(Dx + xD) - A(x)$ $\rightsquigarrow$ błądzenie losowe.
- Ściezki w grafie $\rightsquigarrow$

2 Co można z nimi robić?

- Graf trywialny $\rightsquigarrow$ $V = \mathbb{C}\mathbb{1}$ lub $A = \mathrm{Id}$.
- Graf pełny $\rightsquigarrow$ $V = M_n$ lub $Ax = n\,\mathrm{Tr}(x)\mathbb{1}$.
- Automorfizm grafu $\rightsquigarrow$ macierz unitarna U taka, że $UVU^* = V$ lub $A(UxU^*) = UA(x)U^*$.
- Stopnie wierzchołków $\rightsquigarrow$ macierz stopni $D := A\mathbb{1}$ (nie ma wierzchołków!). Jeśli U jest automorfizmem, to $UD = DU$.
- Graf d-regularny $\rightsquigarrow$ $D = d\mathbb{1}$.
- Laplasjan grafu $\rightsquigarrow$ kwantowy laplasjan $Lx := \frac{1}{2}(Dx + xD) - A(x)$ $\rightsquigarrow$ błądzenie losowe.
- Ściezki w grafie $\rightsquigarrow$ sam chciałbym wiedzieć.

1 Nieprzemienna matematyka

2 Grafy kwantowe

3 Losowe grafy kwantowe

3 Jak losować?

Klasycznie łatwo losuje się macierz sąsiedztwa, ponieważ jest to macierz zero-jedynkowa. W przypadku kwantowym macierz sąsiedztwa musi niestety spełniać szereg algebraicznych relacji. Na szczęście systemy operatorowe są łatwe!

3 Jak losować?

Klasycznie łatwo losuje się macierz sąsiedztwa, ponieważ jest to macierz zero-jedynkowa. W przypadku kwantowym macierz sąsiedztwa musi niestety spełniać szereg algebraicznych relacji. Na szczęście systemy operatorowe są łatwe!

Losowy system operatorowy: ustalamy $d \in \{0, 1, \ldots, n^2 - 1\}$, losujemy niezależnie d macierzy hermitowskich $X_1, \ldots, X_d$ i definiujemy $S_d := \mathrm{span}\{\mathbb{1}, X_1, \ldots, X_d\}$.

3 Jak losować?

Klasycznie łatwo losuje się macierz sąsiedztwa, ponieważ jest to macierz zero-jedynkowa. W przypadku kwantowym macierz sąsiedztwa musi niestety spełniać szereg algebraicznych relacji. Na szczęście systemy operatorowe są łatwe!

Losowy system operatorowy: ustalamy $d \in \{0, 1, \ldots, n^2 - 1\}$, losujemy niezależnie d macierzy hermitowskich $X_1, \ldots, X_d$ i definiujemy $S_d := \mathrm{span}\{\mathbb{1}, X_1, \ldots, X_d\}$.

Jest to odpowiednik modelu $G(n, M)$, w którym liczba krawędzi jest ustalona z góry.

3 Trochę wyników na koniec

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to macierz stopni D ma prawie na pewno jednokrotne wartości własne.

3 Trochę wyników na koniec

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to macierz stopni D ma prawie na pewno jednokrotne wartości własne.

Wniosek (Chirvasitu-W.)

Gdy $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to grupa automorfizmów jest prawie na pewno przemienna.

3 Trochę wyników na koniec

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to macierz stopni D ma prawie na pewno jednokrotne wartości własne.

Wniosek (Chirvasitu-W.)

Gdy $1 \leqslant d \leqslant n^2 - 2$, to grupa automorfizmów jest prawie na pewno przemienna.

Twierdzenie (Chirvasitu-W.)

Jeśli $2 \leqslant d \leqslant n^2 - 3$, to grupa automorfizmów jest prawie na pewno trywialna.

Dziękuję bardzo za uwagę!