O teorii rachunków funkcyjnych generatorów półgrup operatorowych

Yuri Tomilov (współaut.: C. Batty i A. Gomilko)

IM PAN, Warszawa

zebranie PTM, 21 maja, 2021

Idea rachunku funkcyjnego

Załóżmy, że A jest ograniczonym operatorem liniowym na pr. Banacha, $\Omega \supset \sigma(A)$.

Idea rachunku funkcyjnego

Załóżmy, że A jest ograniczonym operatorem liniowym na pr. Banacha, $\Omega \supset \sigma(A)$.

Wzór reprodukujący Cauchy'ego dla $f \in \mathrm{Hol}\,(\overline{\Omega})$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - z)^{-1}\, d\lambda,$$

Idea rachunku funkcyjnego

Załóżmy, że A jest ograniczonym operatorem liniowym na pr. Banacha, $\Omega \supset \sigma(A)$.

Wzór reprodukujący Cauchy'ego dla $f \in \mathrm{Hol}\,(\overline{\Omega})$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - z)^{-1}\, d\lambda,$$

Klasyczny rachunek Riesza-Dunforda: wstawiamy A zamiast z

$$\mathrm{Hol}\,(\overline{\Omega}) \ni f \;\mapsto\; f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda.$$

Idea rachunku funkcyjnego

Załóżmy, że A jest ograniczonym operatorem liniowym na pr. Banacha, $\Omega \supset \sigma(A)$.

Wzór reprodukujący Cauchy'ego dla $f \in \mathrm{Hol}\,(\overline{\Omega})$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - z)^{-1}\, d\lambda,$$

Klasyczny rachunek Riesza-Dunforda: wstawiamy A zamiast z

$$\mathrm{Hol}\,(\overline{\Omega}) \ni f \;\mapsto\; f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda.$$

Bardziej skomplikowany przykład: wzór Dyn'kina-Hellfera-Sjöstranda

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda - \frac{1}{\pi} \int\int_{\Omega\setminus\sigma(A)} \frac{\partial f}{\partial \bar{\lambda}}(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, dS(\lambda)$$

Niech A będzię gęsto okreś. operatorem domkn. na pr. Banacha X,
Υ będzie funkcyjną algebrą Banacha zdef. na $\Omega \supset \sigma(A)$ (z jedynką 1).

Niech A będzię gęsto okreś. operatorem domkn. na pr. Banacha X, Υ będzie funkcyjną algebrą Banacha zdef. na $\Omega \supset \sigma(A)$ (z jedynką 1).

Υ-rachunkiem funkcyjnym dla A będziemy nazywać ogran. homomorfizm algebr $\Phi : \Upsilon \to L(X)$ taki, że $\Phi((\lambda + \cdot)^{-1}) = (\lambda + A)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\Phi(1) = I$.

Niech A będzię gęsto okreś. operatorem domkn. na pr. Banacha X, Υ będzie funkcyjną algebrą Banacha zdef. na $\Omega \supset \sigma(A)$ (z jedynką 1).

Υ-rachunkiem funkcyjnym dla A będziemy nazywać ogran. homomorfizm algebr $\Phi : \Upsilon \to L(X)$ taki, że
$\Phi((\lambda + \cdot)^{-1}) = (\lambda + A)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\Phi(1) = I$.

Przypomnienie: $X = H$ pr. Hilberta, A oper. lin. na H, $A = A^* \Rightarrow$
$\exists\ (\Omega, \mu)$ oraz $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$: A jest unit.roznowazny do M_a na $L^2(\Omega, \mu)$,

$$M_a f := af, \qquad \mathrm{dom}(M_a) = \{f \in L^2(\Omega, \mu) : af \in L^2(\Omega, \mu)\}.$$

Niech A będzię gęsto okreś. operatorem domkn. na pr. Banacha X, Υ będzie funkcyjną algebrą Banacha zdef. na $\Omega \supset \sigma(A)$ (z jedynką 1).

Υ-rachunkiem funkcyjnym dla A będziemy nazywać ogran. homomorfizm algebr $\Phi : \Upsilon \to L(X)$ taki, że $\Phi((\lambda + \cdot)^{-1}) = (\lambda + A)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\Phi(1) = I$.

Przypomnienie: $X = H$ pr. Hilberta, A oper. lin. na H, $A = A^* \Rightarrow$ $\exists\ (\Omega, \mu)$ oraz $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$: A jest unit.roznowazny do M_a na $L^2(\Omega, \mu)$,

$$M_a f := af, \qquad \mathrm{dom}(M_a) = \{f \in L^2(\Omega, \mu) : af \in L^2(\Omega, \mu)\}.$$

Zauważmy, że

$$(\Psi : g \mapsto M_{g \circ a}) : B(\sigma(A)) \mapsto L(L^2(\Omega, \mu))$$

jest homomorfizmem C^*-algebr, gdzie $B(\sigma(A))$ jest algebrą ogr. funkcji borelowskich na $\sigma(A)$.

Twierdzenie

Jeśli A jest operatorem samosprzeżonym na pr. Hilberta H, to $\exists$ *jedyne ciągłe odwzorowanie* $\Psi : B(\sigma(A)) \mapsto L(H)$ *(kontrakcja) takie, że*

- Ψ *jest homomorfizmem (zdef. wcześniej);*
- $\Psi((\lambda - \cdot)^{-1}) = (\lambda - A)^{-1} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R};$
- *If* $(g_n) \in B(\sigma(A))$ *jest jednost. ogr.,* $g_n \to g$ *p.w., to* $\Psi(g_n) \to \Psi(g)$ *w mocnej topologii.*

W szcz., A posiada $B(\mathbb{R})$-rachunek funkcyjny.

Twierdzenie

Jeśli A jest operatorem samosprzeżonym na pr. Hilberta H, to $\exists$ *jedyne ciągłe odwzorowanie* $\Psi : B(\sigma(A)) \mapsto L(H)$ *(kontrakcja) takie, że*

- Ψ *jest homomorfizmem (zdef. wcześniej);*
- $\Psi((\lambda - \cdot)^{-1}) = (\lambda - A)^{-1} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R};$
- *If* $(g_n) \in B(\sigma(A))$ *jest jednost. ogr.,* $g_n \to g$ *p.w., to* $\Psi(g_n) \to \Psi(g)$ *w mocnej topologii.*

W szcz., A posiada $B(\mathbb{R})$-rachunek funkcyjny.

Przykłady:

A. $Af = f'$ na $L^p(\mathbb{R})$ (z diedz. maks.). Niestety, rachunki funkcyjne A są dość biedne gdy $p \neq 2$ (nie posiada $C_0(i\mathbb{R})$) rachunku).

B. $A = i\Delta$ na $L^p(\mathbb{R}^d)$ (z dziedz maks) $e^{i\Delta} \in L(L^p(\mathbb{R}^d)) \Rightarrow p = 2$.

Twierdzenie

Jeśli A jest operatorem samosprzeżonym na pr. Hilberta H, to $\exists$ jedyne ciągłe odwzorowanie $\Psi : B(\sigma(A)) \mapsto L(H)$ (kontrakcja) takie, że

- *Ψ jest homomorfizmem (zdef. wcześniej);*
- $\Psi((\lambda - \cdot)^{-1}) = (\lambda - A)^{-1} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;
- *If $(g_n) \in B(\sigma(A))$ jest jednost. ogr., $g_n \to g$ p.w., to $\Psi(g_n) \to \Psi(g)$ w mocnej topologii.*

W szcz., A posiada $B(\mathbb{R})$-rachunek funkcyjny.

Przykłady:

A. $Af = f'$ na $L^p(\mathbb{R})$ (z diedz. maks.). Niestety, rachunki funkcyjne A są dość biedne gdy $p \neq 2$ (nie posiada $C_0(i\mathbb{R})$) rachunku).

B. $A = i\Delta$ na $L^p(\mathbb{R}^d)$ (z dziedz maks) $e^{i\Delta} \in L(L^p(\mathbb{R}^d)) \Rightarrow p = 2$.

Jak zdefiniować $A^\alpha, \alpha > 0$, czy $\log(A)$?

Ogólne podejście

Chcemy: odwzorowanie (" rachunek funkcyjny ") przypisujące f z algebry funkcji Υ domknięty operator liniowy $f(A)$ z (podprzestrzeni) pr. Banacha X do X takie, że

- $f(s) \equiv 1$ odwzorowuje się w I;
- Jeśli $f(z) = (\lambda - z)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$, to $f(A) = (\lambda I - A)^{-1}$;
- Jeśli $f_1, f_2 \in \Upsilon$, to

$$(f_1 + f_2)(A) \subseteq f_1(A) + f_2(A), \quad (f_1 f_2)(A) \subseteq f_1(A) f_2(A).$$

Ogólne podejście

Chcemy: odwzorowanie (" rachunek funkcyjny ") przypisujące f z algebry funkcji Υ domknięty operator liniowy $f(A)$ z (podprzestrzeni) pr. Banacha X do X takie, że

- $f(s) \equiv 1$ odwzorowuje się w I;
- Jeśli $f(z) = (\lambda - z)^{-1}, \lambda \in \rho(A)$, to $f(A) = (\lambda I - A)^{-1}$;
- Jeśli $f_1, f_2 \in \Upsilon$, to

$$(f_1 + f_2)(A) \subseteq f_1(A) + f_2(A), \quad (f_1 f_2)(A) \subseteq f_1(A) f_2(A).$$

Niech $\Lambda \subset \Upsilon$ sa algebrami funkcyjnymi. Definicja przez regularyzacje: gdy dla $f \in \Upsilon$ $\exists$ $e \in \Lambda$ taka, że $ef \in \Lambda$ oraz $e(A)$ jet injekcją, to

$$f(A) := e(A)^{-1}(ef)(A).$$

Nie zależy od wyboru e!

Przykład [Holomorficzny rachunek funkcyjny]:
Niech $\Sigma_\theta := \{\lambda : |\arg\lambda| < \theta\}$, A - operator na pr. Banacha, $\overline{\mathrm{Im} A} = X$:

$$\|z(z-A)^{-1}\| \le C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta'}, \theta' \in (0,\theta), \theta \in (0,\pi).$$

Przykład [Holomorficzny rachunek funkcyjny]:
Niech $\Sigma_\theta := \{\lambda : |\arg\lambda| < \theta\}$, A - operator na pr. Banacha, $\overline{\mathrm{Im} A} = X$:

$$\|z(z-A)^{-1}\| \le C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta'}, \theta' \in (0,\theta), \theta \in (0,\pi).$$

Wówczas, aby zdefiniowac $f(A)$ dla $f \in \Upsilon = H^\infty(\Sigma_\theta)$:

$$\begin{aligned} \Lambda := H_0^\infty(\Sigma_\theta) \quad &:= \quad \bigcup_{C,\epsilon>0} \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\Sigma_\theta) : |f(\lambda)| \le \frac{C|\lambda|^\epsilon}{1+|\lambda|^{2\epsilon}} \right\} \\ e \quad &:= \quad e_n(\lambda) = (z/(1+z)^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma_\theta} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda, \qquad f \in \Lambda.$$

Przykład [Holomorficzny rachunek funkcyjny]:
Niech $\Sigma_\theta := \{\lambda : |\arg\lambda| < \theta\}$, A - operator na pr. Banacha, $\overline{\mathrm{Im} A} = X$:

$$\|z(z-A)^{-1}\| \le C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta'}, \theta' \in (0,\theta), \theta \in (0,\pi).$$

Wówczas, aby zdefiniowac $f(A)$ dla $f \in \Upsilon = H^\infty(\Sigma_\theta)$:

$$\Lambda := H_0^\infty(\Sigma_\theta) := \bigcup_{C,\epsilon>0} \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\Sigma_\theta) : |f(\lambda)| \le \frac{C|\lambda|^\epsilon}{1+|\lambda|^{2\epsilon}} \right\}$$

$$e := e_n(\lambda) = (z/(1+z)^2)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma_\theta} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda, \qquad f \in \Lambda.$$

$f(A) \in L(X)\ \forall\ f \in H^\infty(\Sigma_\theta) \Rightarrow (\mathrm{def})$ A posiada ogr. H^∞-rach. funk.

Przykład [Holomorficzny rachunek funkcyjny]:
Niech $\Sigma_\theta := \{\lambda : |\arg\lambda| < \theta\}$, A - operator na pr. Banacha, $\overline{\mathrm{Im} A} = X$:

$$\|z(z-A)^{-1}\| \le C, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta'}, \theta' \in (0,\theta), \theta \in (0,\pi).$$

Wówczas, aby zdefiniowac $f(A)$ dla $f \in \Upsilon = H^\infty(\Sigma_\theta)$:

$$\begin{aligned} \Lambda := H_0^\infty(\Sigma_\theta) &:= \bigcup_{C,\epsilon>0} \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\Sigma_\theta) : |f(\lambda)| \le \frac{C|\lambda|^\epsilon}{1+|\lambda|^{2\epsilon}} \right\} \\ e &:= e_n(\lambda) = (z/(1+z)^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma_\theta} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda, \qquad f \in \Lambda.$$

$f(A) \in L(X)\ \forall f \in H^\infty(\Sigma_\theta) \Rightarrow (\mathrm{def})$ A posiada ogr. H^∞-rach. funk.
Zamiast $H^\infty(\Sigma_\theta)$ można rozw. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f \in \mathrm{Hol}(\Sigma_\theta) : e^n f \in H_0^\infty(\Sigma_\theta)\}$.

2-minutowy wykład z C_0-półgrup

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Definicja. C_0-pólgrupą nazywa się mocno ciągła funkcja $T : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{L}(X)$ taka, że $T(0) = I$ oraz $T(t+s) = T(t)T(s),\ t, s \geq 0.$

2-minutowy wykład z C_0-półgrup

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Definicja. C_0-pólgrupą nazywa się mocno ciągła funkcja $T : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{L}(X)$ taka, że $T(0) = I$ oraz $T(t+s) = T(t)T(s),\ t, s \geq 0.$

Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą.
Definicja Operator A zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\,(G) &:= \left\{ x \in X : \frac{dT(t)x}{dt} \restriction_{t=0+} \text{ istnieje} \right\} \\ Gx &:= \frac{dT(t)x}{dt} \restriction_{t=0+},\ x \in \mathrm{dom}\,(G), \end{aligned}$$

nazywa się generatorem $(T(t))_{t\geq 0}$.

2-minutowy wykład z C_0-półgrup

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Definicja. C_0-półgrupą nazywa się mocno ciągła funkcja $T : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{L}(X)$ taka, że $T(0) = I$ oraz $T(t+s) = T(t)T(s),\ t, s \geq 0.$

Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą.
Definicja Operator A zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\,(G) &:= \left\{ x \in X : \frac{dT(t)x}{dt} \restriction_{t=0+} \text{ istnieje} \right\} \\ Gx &:= \frac{dT(t)x}{dt} \restriction_{t=0+},\ x \in \mathrm{dom}\,(G), \end{aligned}$$

nazywa się generatorem $(T(t))_{t\geq 0}$.

W sensie rach.funk.: $T(t) = e^{-tA} = e^{t\cdot}[-A]$. **Ozn.:** $T(t) = e^{-tA}$ **!**

2-minutowy wykład z C_0-półgrup

Niech X będzie przestrzenią Banacha.

Definicja. C_0-pólgrupą nazywa się mocno ciągła funkcja $T : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{L}(X)$ taka, że $T(0) = I$ oraz $T(t+s) = T(t)T(s),\ t, s \geq 0$.

Niech $(T(t))_{t\geq 0}$ będzie C_0-półgrupą.
Definicja Operator A zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}\,(G) &:= \left\{ x \in X : \frac{dT(t)x}{dt} \restriction_{t=0+} \text{ istnieje} \right\} \\ Gx &:= \frac{dT(t)x}{dt} \restriction_{t=0+},\ x \in \mathrm{dom}\,(G), \end{aligned}$$

nazywa się generatorem $(T(t))_{t\geq 0}$.

W sensie rach.funk.: $T(t) = e^{-tA} = e^{t\cdot}[-A]$. **Ozn.:** $T(t) = e^{-tA}$ **!**
A jest domknięty, gęsto określony oraz

$$(\lambda + A)^{-1} = (\mathcal{L}e^{-\cdot A})(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA}\, dt \quad \text{(mocna całka)}$$

dla λ z pewnej prawej półpłaszczyzny.

Motywacja: Niech A będzie operatorem liniowym z $\rho(A) \neq \emptyset$ oraz gęstą dziedziną $\mathrm{dom}(A)$.

Abstrakcyjny problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathrm{dom}\,(A), \end{cases}$$

jest dobrze postawiony $\Leftrightarrow$ $-A$ generuję C_0-półgrupę $(e^{-tA})_{t\geq 0}$.

Klasyczne rozwiązania tego problemu: $x(t) = e^{-tA}x_0, x_0 \in \mathrm{dom}(A)$.

Motywacja: Niech A będzie operatorem liniowym z $\rho(A) \neq \emptyset$ oraz gęstą dziedziną $\mathrm{dom}(A)$.

Abstrakcyjny problem Cauchy'ego:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, & x_0 \in \mathrm{dom}\,(A), \end{cases}$$

jest dobrze postawiony $\Leftrightarrow$ $-A$ generuję C_0-półgrupę $(e^{-tA})_{t\geq 0}$.

Klasyczne rozwiązania tego problemu: $x(t) = e^{-tA}x_0, x_0 \in \mathrm{dom}(A)$.
Przykład zabaw.:

$$\partial_t u = \Delta u, \quad u = u(t,x), \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d, u(0,\cdot) = u_0.$$

$$X := L^2(\mathbb{R}^d)), \qquad A := -\Delta, \qquad \mathrm{dom}(A) := H^2(\mathbb{R}^n).$$

$$x(t) : [0,\infty) \to L^2(\mathbb{R}^d),\ x(t) = u(t,\cdot), \quad \dot{x}(t) = -Ax(t), x(0) = u_0,$$

$$(e^{-\Delta t} f)(x) = (4\pi t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\, dy$$

Wcielenia rachunków funkcyjnych. Analiza klasyczna:

Klasyczna funk. kwadratowa: $(S_\varphi f)(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_t * f)(x) \, \frac{dt}{t} \right)^{1/2}$,

$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ szybko maleje, $\varphi_t(x) = t^{-d}\varphi(x/t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$.
„Oszacowanie kwadratowe":

$$\|S_\varphi f\|_{L^p} = \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * f)(x)|^2 \, \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

W wielu przyp.: φ jest radialną, wówczas $(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \psi(|\xi|)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_t * f = \mathcal{F}^{-1} \left(\psi(t|\xi|) \cdot \mathcal{F} f(\xi) \right) = \psi(t\sqrt{-\Delta}) f.$$

Wcielenia rachunków funkcyjnych. Analiza klasyczna:

Klasyczna funk. kwadratowa: $(S_\varphi f)(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_t * f)(x)\, \frac{dt}{t}\right)^{1/2}$,

$\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ szybko maleje, $\varphi_t(x) = t^{-d}\varphi(x/t)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$.
„Oszacowanie kwadratowe":

$$\|S_\varphi f\|_{L^p} = \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\varphi_t * f)(x)|^2\, \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

W wielu przyp.: φ jest radialną, wówczas $(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \psi(|\xi|)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_t * f = \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(t|\xi|) \cdot \mathcal{F}f(\xi)\right) = \psi(t\sqrt{-\Delta})f.$$

Postać abstrakcyjna (Stein-Cowling-...):

$$\left\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\psi_t(A)f)(\cdot)|^2\, \frac{dt}{t}\right)^{1/2} \right\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

$A := \sqrt{-\Delta}$ i $\psi(z) = ze^{-z}$ – g-funkcja kwadratowa Littlewooda-Paley.

Klasyczne twierdzenie o mnożnikach Fouriera (Mihlin/ Hörmander): jeśli ograniczona $\psi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$ należy do klasy Hörmandera H_2^k :

$$\sup_{R>0} \int_{R/2}^{R} |t^j \psi^{(j)}(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \qquad j = \overline{0, k}, \quad k > d/2, d \in \mathbb{N},$$

to operatory (mnożnikowe)

$$f \mapsto \psi(-\Delta) f = \mathcal{F}^{-1}[f(|\xi|^2) \cdot \mathcal{F} f(\xi)]$$

są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^d), 1 < p << \infty$ (przedłużają się z L^2 na L^p).

Klasyczne twierdzenie o mnożnikach Fouriera (Mihlin/ Hörmander): jeśli ograniczona $\psi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$ należy do klasy Hörmandera H_2^k :

$$\sup_{R>0} \int_{R/2}^{R} |t^j \psi^{(j)}(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty \qquad j = \overline{0, k}, \quad k > d/2, d \in \mathbb{N},$$

to operatory (mnożnikowe)

$$f \mapsto \psi(-\Delta)f = \mathcal{F}^{-1}[f(|\xi|^2) \cdot \mathcal{F}f(\xi)]$$

są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^d), 1 < p << \infty$ (przedłużają się z L^2 na L^p).
Stąd, dla odpow. zdefiniowanej „algebry Hörmandera" $\mathcal{H}_2^k$:

$$\mathcal{H}_2^k \mapsto L(L^p(\mathbb{R}^d)), \quad \psi \mapsto \psi(-\Delta) \text{ jest ogr. homomorfizmem algebr.}$$

Prowadzi do ogólnego kontekstu rachunków typu Hörmandera:
$\Delta \Longleftrightarrow A$.
Ścisłe związany z badaniem mnożników spektralnych, oszacowaniami maksymalnymi, ...

Teoria prawdopodobieństwa:

Subordynacja: dla C_0-półgrupy $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ na H i *-ciągłej (splotowej) półgrupy miar ogr. $(\mu_t)_{t\geq 0}$ na $\mathbb{R}_+$, $\mu_0 = \delta_0$, badamy C_0-polgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ subordynowaną $(e^{-tA})_{t\geq 0}$:

$$T(t) := \int_0^\infty e^{-sA}\,\mu_t(ds), \;\; t \geq 0, \;\; \text{np. } e^{-t(-A)^{1/2}} = \int_0^\infty e^{-sA} \frac{te^{t^2/4s}}{\sqrt{4\pi} s^{3/2}}\, ds$$

Istotne m. in. w badaniu “stochastycznych zamian czasu”.

Teoria prawdopodobieństwa:
Subordynacja: dla C_0-półgrupy $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ na H i *-ciągłej (splotowej) półgrupy miar ogr. $(\mu_t)_{t\geq 0}$ na $\mathbb{R}_+$, $\mu_0 = \delta_0$, badamy C_0-polgrupę $(T(t))_{t\geq 0}$ subordynowaną $(e^{-tA})_{t\geq 0}$:

$$T(t) := \int_0^\infty e^{-sA}\,\mu_t(ds),\ t \geq 0,\ \text{np. } e^{-t(-A)^{1/2}} = \int_0^\infty e^{-sA}\frac{te^{t^2/4s}}{\sqrt{4\pi}s^{3/2}}\,ds$$

Istotne m. in. w badaniu "stochastycznych zamian czasu".

Fizyka matematyczna:
Optymalne oszacowania $\|f(A) - f(B)\|$ dla nieprzemiennych samopsr. A i B i "regularnych" f (klasy Besova) w $L(H)$ i klasach Schattena $S_p(H)$ (całki wielokrotne Birmana-Solomyaka).
Istotne w badaniu „funkcji przesunięcia spektral. Kreina-Lifshitsa" ξ:

$$\mathrm{tr}(f(A) - f(B)) = \int f'(t)\xi(t)\,dt \quad \text{(wzór Kreina-Lifshitsa).}$$

Równania w pochodnych cząstkowych:

- opis dziedzin operatorów, prykład: „$D(A^{\alpha}) = [X, D(A)]_{\alpha}, 0 < \alpha < 1$”, problem Kato: „$D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$”
- ekstrapolacja operatorów i półgrup,
- oszacowania na jądra półgrup (gaussowskie, poissonowskie)

-maksymalna regularność rozwiązań: $\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t)$...

Równania w pochodnych cząstkowych:

- opis dziedzin operatorów, prykład: „$D(A^\alpha) = [X, D(A)]_\alpha, 0 < \alpha < 1$”, problem Kato: „$D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$”
- ekstrapolacja operatorów i półgrup,
- oszacowania na jądra półgrup (gaussowskie, poissonowskie)
-maksymalna regularność rozwiązań: $\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t)$...

Teoria aproksymacji:

Przykład: schemat Cranka-Nicolsona aproksymacji $\dot{x}(t) + Ax(t) = 0$.
Jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę na $H \Rightarrow$

$$\|e^{-tA}x - r(tA/n)^n x\| \le \frac{t^\alpha}{n^\alpha}\|A^\alpha x\|, x \in \mathrm{dom}(A^\alpha), \alpha \in (0,2],$$

gdzie $r(z) = (1 - z/2)/(1 + z/2)$.

Równania w pochodnych cząstkowych:
- opis dziedzin operatorów, prykład: „$D(A^\alpha) = [X, D(A)]_\alpha, 0 < \alpha < 1$”, problem Kato: „$D(A^{1/2}) = D(A^{*1/2})$”
- ekstrapolacja operatorów i półgrup,
- oszacowania na jądra półgrup (gaussowskie, poissonowskie)
-maksymalna regularność rozwiązań: $\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t)$...

Teoria aproksymacji:

Przykład: schemat Cranka-Nicolsona aproksymacji $\dot{x}(t) + Ax(t) = 0$.
Jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę na $H \Rightarrow$

$$\|e^{-tA}x - r(tA/n)^n x\| \le \frac{t^\alpha}{n^\alpha}\|A^\alpha x\|, x \in \mathrm{dom}(A^\alpha), \alpha \in (0, 2],$$

gdzie $r(z) = (1 - z/2)/(1 + z/2)$.

Teoria sterowania (dopuszczalność operatorów kontroli i obserwacji):

$$x'(t) + Ax(t) = Bu(t), x(0) = x_0, y(t) = Cx(t),$$

Jeśli A posiada ograniczony H^∞-rachunek,to dopuszcz. C charakter. się w terminach $C(\cdot - A)^{-1}$.

Rachunek funkcyjny Hille-Phillipsa (HP), lata 50-e

Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ na pr. Banacha X, oraz niech $M(\mathbb{R}_+)$ będzie algebrą Banacha miar ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{L}\mu(z) := \int_0^\infty e^{-zt}\, d\mu(t), \quad \mu \in M(\mathbb{R}_+), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

$$\mathcal{LM} := \{\mathcal{L}\mu(z) : \mu \in M(\mathbb{R}_+), z \in \mathbb{C}_+\}, \qquad \|\mathcal{L}\mu\|_{\mathcal{LM}} := \|\mu\|_{M(\mathbb{R}_+)},$$

i zauważmy, że $(\mathcal{LM}, \|\cdot\|_{\mathcal{LM}})$ jest algebrą Banacha.

Rachunek funkcyjny Hille-Phillipsa (HP), lata 50-e

Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ na pr. Banacha X, oraz niech $M(\mathbb{R}_+)$ będzie algebrą Banacha miar ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{L}\mu(z) := \int_0^\infty e^{-zt}\, d\mu(t), \quad \mu \in M(\mathbb{R}_+), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

$$\mathcal{LM} := \{\mathcal{L}\mu(z) : \mu \in M(\mathbb{R}_+), z \in \mathbb{C}_+\}, \qquad \|\mathcal{L}\mu\|_{\mathcal{LM}} := \|\mu\|_{M(\mathbb{R}_+)},$$

i zauważmy, że $(\mathcal{LM}, \|\cdot\|_{\mathcal{LM}})$ jest algebrą Banacha.
HP rachunek funkcyjny jest zadany jako ogr. homomorfizm H :

$$H : \mathcal{LM} \mapsto L(X), \quad H(\mathcal{L}\mu) = \mathcal{L}\mu(A) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA}\, d\mu(t),$$

$$\|H(\mathcal{L}\mu)\| \leq \sup_{t\geq 0} \|e^{-tA}\| \|\mu\|_{M(\mathbb{R}_+)}.$$

Rachunek funkcyjny Hille-Phillipsa (HP), lata 50-e

Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ na pr. Banacha X, oraz niech $M(\mathbb{R}_+)$ będzie algebrą Banacha miar ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Zdefiniujmy

$$\mathcal{L}\mu(z) := \int_0^\infty e^{-zt}\, d\mu(t), \quad \mu \in M(\mathbb{R}_+), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

$$\mathcal{LM} := \{\mathcal{L}\mu(z) : \mu \in M(\mathbb{R}_+),\, z \in \mathbb{C}_+\}, \qquad \|\mathcal{L}\mu\|_{\mathcal{LM}} := \|\mu\|_{M(\mathbb{R}_+)},$$

i zauważmy, że $(\mathcal{LM}, \|\cdot\|_{\mathcal{LM}})$ jest algebrą Banacha.
HP rachunek funkcyjny jest zadany jako ogr. homomorfizm H :

$$H : \mathcal{LM} \mapsto L(X), \quad H(\mathcal{L}\mu) = \mathcal{L}\mu(A) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tA}\, d\mu(t),$$

$$\|H(\mathcal{L}\mu)\| \leq \sup_{t\geq 0} \|e^{-tA}\| \|\mu\|_{M(\mathbb{R}_+)}.$$

Wady: 1. Oszacowania są za grube, ciężko ich otrz. jak dana jest $\mathcal{L}\mu$
2. Nie istnieje dobrej charakteryzacji $\mathcal{LM}$
3. Porównywalnie mały zbiór funkcji, etc.

...

Obserwacje

1. Jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę na pr. Hilberta, to (Plancherel)

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{\mathbb{R}} \|(\alpha + i\beta + A)^{-1}x\|^2\, d\beta &= 2\pi\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|e^{-tA}x\|^2\, dt \\
\alpha \int_{\mathbb{R}} \|(\alpha + i\beta + A^*)^{-1}y\|^2\, d\beta &= 2\pi\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|e^{-tA^*}y\|^2\, dt.
\end{aligned}$$

Wówczas (Cauchy-Schwarz), dla wszystkich x, y,

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \Big(\langle (\alpha + i\beta + A)^{-1}x, y \rangle \Big)' \right| d\beta = \alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \langle (\alpha + i\beta + A)^{-2}x, y \rangle \right| d\beta < \infty$$

Obserwacje

1. Jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę na pr. Hilberta, to (Plancherel)

$$\begin{aligned}
\alpha \int_{\mathbb{R}} \|(\alpha + i\beta + A)^{-1} x\|^2 \, d\beta &= 2\pi\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \|e^{-tA} x\|^2 \, dt \\
\alpha \int_{\mathbb{R}} \|(\alpha + i\beta + A^*)^{-1} y\|^2 \, d\beta &= 2\pi\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t} \|e^{-tA^*} y\|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Wówczas (Cauchy-Schwarz), dla wszystkich x, y,

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \Big(\langle (\alpha + i\beta + A)^{-1} x, y \rangle \Big)' \right| d\beta = \alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \langle (\alpha + i\beta + A)^{-2} x, y \rangle \right| d\beta < \infty$$

2. Jeśli $-A$ generuje ogr. holomorficzną C_0-półgrupę na pr. Banacha, tzn. $\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \|z(z + A)^{-1}\| < \infty$, wówczas powyższy warunek całkowy zachodzi w sposób oczywisty.

Obserwacje

1. Jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę na pr. Hilberta, to (Plancherel)

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \|(\alpha + i\beta + A)^{-1}x\|^2 \, d\beta = 2\pi\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|e^{-tA}x\|^2 \, dt$$

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \|(\alpha + i\beta + A^*)^{-1}y\|^2 \, d\beta = 2\pi\alpha \int_0^\infty e^{-2\alpha t}\|e^{-tA^*}y\|^2 \, dt.$$

Wówczas (Cauchy-Schwarz), dla wszystkich x, y,

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \Big(\langle (\alpha + i\beta + A)^{-1}x, y \rangle \Big)' \right| \, d\beta = \alpha \int_{\mathbb{R}} \left| \langle (\alpha + i\beta + A)^{-2}x, y \rangle \right| \, d\beta < \infty$$

2. Jeśli $-A$ generuje ogr. holomorficzną C_0-półgrupę na pr. Banacha, tzn. $\sup_{z \in \mathbb{C}_+} \|z(z+A)^{-1}\| < \infty$, wówczas powyższy warunek całkowy zachodzi w sposób oczywisty.

Odwrotne twierdzenie: Jeżeli A spełnia warunek rezolwentny (na dowol. pr. Banacha), to $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę.

Niech A będzie domkniętym, gęsto określonym operatorem na pr. Banacha X. Załóżmy, że $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ oraz

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \int_{\mathbb{R}} |\langle(\alpha + i\beta + A)^{-2}x, x^*\rangle| \, d\beta < \infty, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Niech A będzie domkniętym, gęsto określonym operatorem na pr. Banacha X. Załóżmy, że $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ oraz

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \int_{\mathbb{R}} |\langle(\alpha + i\beta + A)^{-2}x, x^*\rangle| \, d\beta < \infty, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Niech $\mathcal{E}$ będzię pr. funkcji holomorficznych g w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|g\|_{\mathcal{E}_0} := \sup_{\alpha>0} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\alpha + i\beta)| \, d\beta < \infty.$$

Niech A będzie domkniętym, gęsto określonym operatorem na pr. Banacha X. Załóżmy, że $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ oraz

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \int_{\mathbb{R}} |\langle(\alpha + i\beta + A)^{-2}x, x^*\rangle| \, d\beta < \infty, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Niech $\mathcal{E}$ będzię pr. funkcji holomorficznych g w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|g\|_{\mathcal{E}_0} := \sup_{\alpha>0} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\alpha + i\beta)| \, d\beta < \infty.$$

Warunek rezolwentny mówi:

$$\mathbb{C}_+ \ni z \mapsto \langle(z + A)^{-1}x, x^*\rangle \in \mathcal{E} \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Niech A będzie domkniętym, gęsto określonym operatorem na pr. Banacha X. Załóżmy, że $\sigma(A) \subset \overline{\mathbb{C}}_+$ oraz

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \int_{\mathbb{R}} |\langle(\alpha + i\beta + A)^{-2}x, x^*\rangle| \, d\beta < \infty, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Niech $\mathcal{E}$ będzię pr. funkcji holomorficznych g w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|g\|_{\mathcal{E}_0} := \sup_{\alpha>0} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\alpha + i\beta)| \, d\beta < \infty.$$

Warunek rezolwentny mówi:

$$\mathbb{C}_+ \ni z \mapsto \langle(z + A)^{-1}x, x^*\rangle \in \mathcal{E} \quad \text{dla wszystkich} \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Meta-pomysł: Jeśli $\mathcal{E}^*$ jest pr. funkcji holomorf. w $\mathbb{C}_+$, dualną do $\mathcal{E}$ i sparowaną z $\mathcal{E}$ przez $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{P}}$, to możemy spróbować zdefiniować $f(A)$ jako

$$\langle f(A)x, x^*\rangle = \langle\langle(\cdot + A)^{-1}x, x^*\rangle, f\rangle_{\mathcal{P}}, \qquad f \in \mathcal{E}^*.$$

(Przypomnijmy wzór Cauchy'ego !)

Niech $\mathcal{E}$ będzie pr. funkcji holomorficznych g w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|g\|_{\mathcal{E}_0} := \sup_{\alpha>0} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\alpha + i\beta)| \, d\beta < \infty.$$

Niech $\mathcal{E}$ będzie pr. funkcji holomorficznych g w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|g\|_{\mathcal{E}_0} := \sup_{\alpha>0} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\alpha + i\beta)| \, d\beta < \infty.$$

Twierdzenie

Niech $g \in \mathcal{E}$.

1. $g(\infty) := \lim_{\operatorname{Re} z \to \infty} g(z)$ *istnieje w* $\mathbb{C}$.
2. *Istnieje* $h \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *taka, że* $g(z) = g(\infty) + \mathcal{L}h(z)$.
3. *Jeśli* $g \in H^1(\mathbb{C}_+)$, *to* $g \in \mathcal{E}$.

Niech $\mathcal{E}_0 = \{f \in \mathcal{E} : f(\infty) = 0\}$. Wówczas $\mathcal{E}$ (lub $\mathcal{E}_0$) jest pr. Banacha z $\| \cdot \|_{\mathcal{E}}$:

$$\|g\|_{\mathcal{E}} := |g(\infty)| + \|g\|_{\mathcal{E}_0}, \qquad g \in \mathcal{E}.$$

Niech $\mathcal{E}$ będzie pr. funkcji holomorficznych g w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|g\|_{\mathcal{E}_0} := \sup_{\alpha>0} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |g'(\alpha+i\beta)|\, d\beta < \infty.$$

Twierdzenie

Niech $g \in \mathcal{E}$.

1. $g(\infty) := \lim_{\mathrm{Re}\, z\to\infty} g(z)$ *istnieje w* $\mathbb{C}$.
2. *Istnieje* $h \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ *taka, że* $g(z) = g(\infty) + \mathcal{L}h(z)$.
3. *Jeśli* $g \in H^1(\mathbb{C}_+)$, *to* $g \in \mathcal{E}$.

Niech $\mathcal{E}_0 = \{f \in \mathcal{E} : f(\infty) = 0\}$. Wówczas $\mathcal{E}$ (lub $\mathcal{E}_0$) jest pr. Banacha z $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$:

$$\|g\|_{\mathcal{E}} := |g(\infty)| + \|g\|_{\mathcal{E}_0}, \qquad g \in \mathcal{E}.$$

Przykład: Dla każdej ogr. miary μ w $\mathbb{C}_+$,

$$g_\mu(z) := \int_{\mathbb{C}_+} \frac{d\mu(a)}{z+a} \in \mathcal{E}.$$

Zdefiniujmy $\mathcal{B}$ jako pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta \in \mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)| \, d\alpha < \infty.$$

Zdefiniujmy $\mathcal{B}$ jako pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha+i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

Istnieje sparowanie między $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ zdefiniowane jako

$$\langle g, f\rangle_{\mathcal{B}} := \int_0^\infty \alpha \int_{-\infty}^\infty g'(\alpha - i\beta) f'(\alpha + i\beta)\, d\beta\, d\alpha.$$

Sparowanie jest ogr. w następującym sensie:

$$|\langle g, f\rangle_{\mathcal{B}}| \le \|g\|_{\mathcal{E}_0}\|f\|_{\mathcal{B}_0}, \qquad g \in \mathcal{E}, \quad f \in \mathcal{B}.$$

Zdefiniujmy $\mathcal{B}$ jako pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha+i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

Istnieje sparowanie między $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ zdefiniowane jako

$$\langle g, f\rangle_{\mathcal{B}} := \int_0^\infty \alpha \int_{-\infty}^\infty g'(\alpha-i\beta)f'(\alpha+i\beta)\, d\beta\, d\alpha.$$

Sparowanie jest ogr. w następującym sensie:

$$|\langle g, f\rangle_{\mathcal{B}}| \le \|g\|_{\mathcal{E}_0}\|f\|_{\mathcal{B}_0}, \qquad g\in\mathcal{E}, \quad f\in\mathcal{B}.$$

Dla intuicji: wzór Greena (Taibleson, Fefferman-Stein) implikuje:

$$\langle g, f\rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} g(-i\beta)f(i\beta)\, d\beta$$

dla „wystarczająco dobrych” f i g (np. $g\in H^1(\mathbb{C}_+)$ i $f\in\mathcal{B}$, $f(\infty)=0$.)

Własności przestrzeni $\mathcal{B}$

Przypomnijmy: $\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

Własności przestrzeni $\mathcal{B}$

Przypomnijmy: $\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

Twierdzenie

Niech $f \in \mathcal{B}$.

1. $f(\infty) := \lim_{\mathrm{Re}\, z\to\infty} f(z)$ *istnieje w* $\mathbb{C}$.
2. $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\|f\|_\infty \le |f(\infty)| + \|f\|_{\mathcal{B}_0}$.
3. *Jeśli f jest holomorficzna w $\mathbb{C}_+$ oraz $f' \in H^1(\mathbb{C}_+)$, to $f \in \mathcal{B}$.*

Niech $\mathcal{B}_0 := \{f \in \mathcal{B} : f(\infty) = 0\}$. Jeśli

Własności przestrzeni $\mathcal{B}$

Przypomnijmy: $\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

Twierdzenie

Niech $f \in \mathcal{B}$.

1. $f(\infty) := \lim_{\operatorname{Re} z\to\infty} f(z)$ *istnieje w* $\mathbb{C}$.
2. $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\|f\|_\infty \le |f(\infty)| + \|f\|_{\mathcal{B}_0}$.
3. *Jeśli f jest holomorficzna w $\mathbb{C}_+$ oraz $f' \in H^1(\mathbb{C}_+)$, to $f \in \mathcal{B}$.*

Niech $\mathcal{B}_0 := \{f \in \mathcal{B} : f(\infty) = 0\}$. Jeśli

$$\|f\|_{\mathcal{B}} := \|f\|_{\mathcal{B}_0} + \|f\|_\infty, \qquad f \in \mathcal{B},$$

to $(\mathcal{B}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ jest algebrą Banacha izomorficzną z $B^0_{\infty,1}(\mathbb{C}_+)$.

Własności topologiczne $\mathcal{B}$, cd

Twierdzenie

1. *Mamy $\mathcal{LM} \subset \mathcal{B}$, ale $\mathcal{LM}$ nie jest ani gęsta, ani domknięta w $\mathcal{B}_0$.*

Własności topologiczne $\mathcal{B}$, cd

Twierdzenie

1. *Mamy $\mathcal{LM} \subset \mathcal{B}$, ale $\mathcal{LM}$ nie jest ani gęsta, ani domknięta w $\mathcal{B}_0$.*
2. *$\mathcal{LM}$ jest gęsta w $\mathcal{B}$ w topologii jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych z $\mathbb{C}_+$.*
3. *Domknięta kula jednostkowa U w $\mathcal{B}$ jest zwarta w topologii jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych z $\mathbb{C}_+$.*

Własności topologiczne $\mathcal{B}$, cd

Twierdzenie

1. *Mamy $\mathcal{LM} \subset \mathcal{B}$, ale $\mathcal{LM}$ nie jest ani gęsta, ani domknięta w $\mathcal{B}_0$.*
2. *$\mathcal{LM}$ jest gęsta w $\mathcal{B}$ w topologii jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych z $\mathbb{C}_+$.*
3. *Domknięta kula jednostkowa U w $\mathcal{B}$ jest zwarta w topologii jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych z $\mathbb{C}_+$.*

Nasze sparowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ indukuje odwzorowania (kontrakcje) $\Psi_{\mathcal{B}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}^*$ i $\Psi_{\mathcal{E}} : \mathcal{B} \to \mathcal{E}^*$.

Twierdzenie

Obrazy $\Psi_{\mathcal{B}}$ i $\Psi_{\mathcal{E}}$ nie są gęstę w ${\mathcal{B}_0}^*$ i $\mathcal{E}_0^*$, odp.

Własności topologiczne $\mathcal{B}$, cd

Twierdzenie

1. *Mamy $\mathcal{LM} \subset \mathcal{B}$, ale $\mathcal{LM}$ nie jest ani gęsta, ani domknięta w $\mathcal{B}_0$.*
2. *$\mathcal{LM}$ jest gęsta w $\mathcal{B}$ w topologii jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych z $\mathbb{C}_+$.*
3. *Domknięta kula jednostkowa U w $\mathcal{B}$ jest zwarta w topologii jednostajnej zbieżności na zbiorach zwartych z $\mathbb{C}_+$.*

Nasze sparowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ indukuje odwzorowania (kontrakcje) $\Psi_{\mathcal{B}} : \mathcal{E} \to \mathcal{B}^*$ i $\Psi_{\mathcal{E}} : \mathcal{B} \to \mathcal{E}^*$.

Twierdzenie

Obrazy $\Psi_{\mathcal{B}}$ i $\Psi_{\mathcal{E}}$ nie są gęstę w ${\mathcal{B}_0}^*$ i $\mathcal{E}_0^*$, odp. Z drugiej strony,

$$\mathcal{LM} \text{ jest } \mathcal{E} - \text{słabo gęsty w } \mathcal{B}.$$

Wzór reprodukujący [Coifman-Meyer-Dyn'kin- ...]

Twierdzenie (Podstawowy wzór (jądro reprodukujące))

Niech $f \in \mathcal{B}$, $z = s + it \in \overline{\mathbb{C}}_+$ *and* $r_z(\lambda) = (\lambda + z)^{-1}$. *Wówczas*

$$f(z) = f(\infty) + \frac{2}{\pi}\langle r_z, f\rangle_{\mathcal{B}}$$

Wzór reprodukujący [Coifman-Meyer-Dyn'kin- ...]

Twierdzenie (Podstawowy wzór (jądro reprodukujące))

Niech $f \in \mathcal{B}$, $z = s + it \in \overline{\mathbb{C}}_+$ *and* $r_z(\lambda) = (\lambda + z)^{-1}$. *Wówczas*

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\infty) + \frac{2}{\pi}\langle r_z, f\rangle_{\mathcal{B}} \\ &= f(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{f'(\alpha + i\beta)}{(s + it + \alpha - i\beta)^2}\, d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Wzór reprodukujący [Coifman-Meyer-Dyn'kin- ...]

Twierdzenie (Podstawowy wzór (jądro reprodukujące))

Niech $f \in \mathcal{B}$, $z = s + it \in \overline{\mathbb{C}}_+$ and $r_z(\lambda) = (\lambda + z)^{-1}$. Wówczas

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\infty) + \frac{2}{\pi}\langle r_z, f\rangle_{\mathcal{B}} \\ &= f(\infty) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \alpha \int_{-\infty}^\infty \frac{f'(\alpha + i\beta)}{(s + it + \alpha - i\beta)^2}\, d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Przypomnijmy wzór Greena:

$$\langle g, f\rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} g(-i\beta) f(i\beta)\, d\beta \quad \text{dla “wystarczająco dobrych” } f, g.$$

Wzór reprodukujący $\longrightarrow$(wzór Greena) $\longrightarrow$ wzór Cauchy'ego:

$$\frac{2}{\pi}\langle r_z, f\rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(i\beta)}{z - i\beta}\, d\beta = \frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathbb{R}} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda = f(z).$$

“$\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny”[Peller, Bourgain, Pisier, Vitse/Nikolski, Haase, ...]

Zdefinujmy $\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X, X^{**})$, $\Phi_A(f) = f(A)$, jako w^*-całkę:

$$\langle f(A)x, x^* \rangle = f(\infty) + \frac{2}{\pi} \Big\langle \langle (\cdot + A)^{-1} x, x^* \rangle, f \Big\rangle_{\mathcal{B}}, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

"$\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny"[Peller, Bourgain, Pisier, Vitse/Nikolski, Haase, ...]

Zdefinujmy $\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X, X^{**})$, $\Phi_A(f) = f(A)$, jako w^*-całkę:

$$\langle f(A)x, x^* \rangle = f(\infty) + \frac{2}{\pi} \left\langle \langle (\cdot + A)^{-1} x, x^* \rangle, f \right\rangle_{\mathcal{B}}, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Twierdzenie (BGT18)

Niech $-A$ będzie generatorem ogr. C_0-półgrupy na pr. Hilberta X lub (wycinkowo) ogr. holomorf.C_0-półgrupy na pr. Banacha X. Wówczas

a) *Wzór powyżej* definiuje *ogr. homomorfizm algebr*

$$\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X), \qquad \Phi_A(f) := f(A), \qquad (\|f(A)\| \le C_A \|f\|_{\mathcal{B}}).$$

“$\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny”[Peller, Bourgain, Pisier, Vitse/Nikolski, Haase, ...]

Zdefinujmy $\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X, X^{**})$, $\Phi_A(f) = f(A)$, jako w^*-całkę:

$$\langle f(A)x, x^* \rangle = f(\infty) + \frac{2}{\pi} \Big\langle \langle (\cdot + A)^{-1} x, x^* \rangle, f \Big\rangle_{\mathcal{B}}, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Twierdzenie (BGT18)

Niech $-A$ będzie generatorem ogr. C_0-półgrupy na pr. Hilberta X lub (wycinkowo) ogr. holomorf. C_0-półgrupy na pr. Banacha X. Wówczas

a) *Wzór powyżej* definiuje *ogr. homomorfizm algebr*

$$\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X), \qquad \Phi_A(f) := f(A), \qquad (\|f(A)\| \le C_A \|f\|_{\mathcal{B}}).$$

b) *$\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny (ostro!) rozszerza HP-rachunek, i jest zgodny z holomorficznym rachunkiem funkcyjnym.*

“$\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny”[Peller, Bourgain, Pisier, Vitse/Nikolski, Haase, ...]

Zdefinujmy $\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X, X^{**})$, $\Phi_A(f) = f(A)$, jako w^*-całkę:

$$\langle f(A)x, x^* \rangle = f(\infty) + \frac{2}{\pi} \left\langle \langle (\cdot + A)^{-1} x, x^* \rangle, f \right\rangle_{\mathcal{B}}, \quad x \in X, x^* \in X^*.$$

Twierdzenie (BGT18)

Niech $-A$ będzie generatorem ogr. C_0-półgrupy na pr. Hilberta X lub (wycinkowo) ogr. holomorf. C_0-półgrupy na pr. Banacha X. Wówczas

a) *Wzór powyżej* definiuje *ogr. homomorfizm algebr*

$$\Phi_A : \mathcal{B} \to L(X), \qquad \Phi_A(f) := f(A), \qquad (\|f(A)\| \le C_A \|f\|_{\mathcal{B}}).$$

b) *$\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny (ostro!) rozszerza HP-rachunek, i jest zgodny z holomorficznym rachunkiem funkcyjnym.*

c) *Zachodzą twierdzenie o odwzorowaniu widma oraz subtelniejsze własności ciągłości Φ_A.*

Funkcji z holomorficznym przedłużeniem w lewo

$H^\infty_\omega := H^\infty(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\omega\})$.

Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgr. na H, $f \in H^\infty_\omega$, $\omega > 0$.

Zauważmy: $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f \cdot e^{-\tau \cdot} \in \mathcal{B}$.

Funkcji z holomorficznym przedłużeniem w lewo

$H^\infty_\omega := H^\infty(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\omega\})$.

Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgr. na H, $f \in H^\infty_\omega$, $\omega > 0$.

Zauważmy: $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f \cdot e^{-\tau \cdot} \in \mathcal{B}$.

Twierdzenie (Haase, 2009, Haase-Rozendaal, 13, Zwart, 12)

Dla każdego $\tau > 0$ mamy $f(A)e^{-\tau A} \in L(H)$, oraz

$$\|f(A)e^{-\tau A}\| \le 4K_A^2 e^{-\omega\tau}\left(2 + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\omega\tau}\right)\right)\|f\|_{H^\infty_\omega}.$$

Funkcji z holomorficznym przedłużeniem w lewo

$H^\infty_\omega := H^\infty(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\omega\})$.

Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgr. na H, $f \in H^\infty_\omega$, $\omega > 0$.

Zauważmy: $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f \cdot e^{-\tau \cdot} \in \mathcal{B}$.

Twierdzenie (Haase, 2009, Haase-Rozendaal, 13, Zwart, 12)

Dla każdego $\tau > 0$ mamy $f(A)e^{-\tau A} \in L(H)$, oraz

$$\|f(A)e^{-\tau A}\| \leq 4K_A^2 e^{-\omega\tau}\left(2 + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\omega\tau}\right)\right)\|f\|_{H^\infty_\omega}.$$

Zauważmy: $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f(\cdot) \cdot (\lambda + \cdot)^{-\tau} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{C}_+$.

Funkcji z holomorficznym przedłużeniem w lewo

$H^\infty_\omega := H^\infty(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\omega\})$.
Niech $-A$ generuje ogr. C_0-półgr. na H, $f \in H^\infty_\omega$, $\omega > 0$.
Zauważmy: $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f \cdot e^{-\tau \cdot} \in \mathcal{B}$.

Twierdzenie (Haase, 2009, Haase-Rozendaal, 13, Zwart, 12)

Dla każdego $\tau > 0$ *mamy* $f(A)e^{-\tau A} \in L(H)$, *oraz*

$$\|f(A)e^{-\tau A}\| \le 4K_A^2 e^{-\omega\tau}\left(2 + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{\omega\tau}\right)\right)\|f\|_{H^\infty_\omega}.$$

Zauważmy: $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f(\cdot) \cdot (\lambda + \cdot)^{-\tau} \in \mathcal{B}, \lambda \in \mathbb{C}_+$.

Twierdzenie (Haase-Rozendaal, 13)

Dla każdych $\tau > 0$ *i* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ *mamy* $f(A)(+ A)^{-\tau} \in L(H)$, *oraz istnieje* C *(zależące od* ω, τ *i* λ*) takie, że*

$$\|f(A)(\lambda + A)^{-\tau}\| \le CK_A^2\|f\|_{H^\infty_\omega}.$$

Potęgi transformaty Caley'ego

Niech

$$V(z) = \frac{z-1}{z+1}, \qquad z \in \mathbb{C}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problem: jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę, to jakie jest najlepsze oszacowanie dla $\|V(A)^n\|$?

Wiele prac: Butzer-Westphal, Kato, Thomee-Walbin, Chorin-Hughes -Marsden-McCracken, de Laubenfels, Zwart, Crouzeix, ...

Potęgi transformaty Caley'ego

Niech

$$V(z) = \frac{z-1}{z+1}, \qquad z \in \mathbb{C}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Problem: jeśli $-A$ generuje ogr. C_0-półgrupę, to jakie jest najlepsze oszacowanie dla $\|V(A)^n\|$?

Wiele prac: Butzer-Westphal, Kato, Thomee-Walbin, Chorin-Hughes -Marsden-McCracken, de Laubenfels, Zwart, Crouzeix, ...

Twierdzenie

Niech $-A$ będzie generatorem ogr. C_0-półgrupy na pr. Hilberta. Wówczas

$$\|V(A)^n\| \le 4K_A^2[3 + 2\log(2n)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Porównujmy HP-normę z $\mathcal{B}$-normą:

$$\frac{\|V^n\|_{\mathrm{HP}}}{\|V^n\|_{\mathcal{B}}} \asymp \frac{n^{1/2}}{\log n} \qquad n \to \infty.$$

Problem “generatora odwrotnego”

Podczas gdy $e^{-1/z} \notin \mathcal{B}$, zauważmy, że $e^{-1/(z+1)}$, $z(1+z)^{-1}e^{-1/z} \in \mathcal{B}$.

Corollary (Zwart, 07)

Niech $-A$ będzie generatorem C_0-półgrupy $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ na pr. Hilberta takiej, że

$$\|e^{-tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad t \geq 0, \omega > 0.$$

Wówczas

$$\|e^{-tA^{-1}}\| \leq 2\pi K_A^2 \left(\frac{1+2t/\omega}{1+t/\omega} + e^{-1} \log\left(\frac{t}{\omega}+1\right)\right), \qquad t \geq 0.$$

Problem "generatora odwrotnego"

Podczas gdy $e^{-1/z} \notin \mathcal{B}$, zauważmy, że $e^{-1/(z+1)}$, $z(1+z)^{-1}e^{-1/z} \in \mathcal{B}$.

Corollary (Zwart, 07)

Niech $-A$ *będzie generatorem* C_0*-półgrupy* $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ *na pr. Hilberta takiej, że*

$$\|e^{-tA}\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad t \geq 0, \omega > 0.$$

Wówczas

$$\|e^{-tA^{-1}}\| \leq 2\pi K_A^2 \left(\frac{1+2t/\omega}{1+t/\omega} + e^{-1} \log\left(\frac{t}{\omega}+1\right)\right), \qquad t \geq 0.$$

Twierdzenie (BGT, 18)

Niech $-A$ *będzie generatorem ogr.* C_0*-półgrupy na pr. Hilberta, oraz niech* $A^{-1} \in L(X)$. *Wówczas istnieje* $C_A > 0$ *taka, że*

$$\|e^{-tA^{-1}}\| \leq C_A(1+\log(1+t)), \qquad t \geq 0.$$

Optymalność i jednoznaczność

Niech A będzię gęsto określ.operatorem domkniętym na pr. Banacha X, $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{C}}_+$.
$\mathcal{B}$-rachunkiem funk. dla A nazywamy (ogr.) homomorfizm algebr $\Phi : \mathcal{B} \to L(X)$ taki, że $\Phi((z+\cdot)^{-1}) = (z+A)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Optymalność i jednoznaczność

Niech A będzię gęsto określ.operatorem domkniętym na pr. Banacha X, $\sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{C}}_+$.
$\mathcal{B}$-rachunkiem funk. dla A nazywamy (ogr.) homomorfizm algebr $\Phi : \mathcal{B} \to L(X)$ taki, że $\Phi((z+\cdot)^{-1}) = (z+A)^{-1}$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Twierdzenie

Załóżmy, że A posiada $\mathcal{B}$-rachunek Φ.

- *Wówczas dla wszystkich $x \in X$ i $x^* \in X^*$,*

$$\sup_{\alpha>0} \alpha \int_{\mathbb{R}} |\langle (\alpha + i\beta + A)^{-2} x, x^* \rangle| \, d\beta < \infty.$$

  W szczególności, $-A$ generuje ograniczoną C_0-półgrupę na X.

- *$\mathcal{B}$-rachunek Φ jest wyzn. jednoznacznie, i definiuje się wzorem*

$$\langle \Phi(f)x, x^* \rangle = f(\infty) + \frac{2}{\pi} \left\langle \langle (\cdot + A)^{-1} x, x^* \rangle, f \right\rangle_{\mathcal{B}}, x \in X, x^* \in X^*.$$

Pozbywamy się ... półgrup (!) $(e^{-t\cdot}[A] \to f(t\cdot)[A])$

Pozbywamy się ... półgrup (!) ($e^{-t\cdot}[A] \to f(t\cdot)[A]$)

Twierdzenie (opis generatorów A)

Niech $f \in \mathcal{B}$ bedzię taką, że $f' \in \mathcal{B}$, and $f'(0) = 1$. Wówczas A jest prawostronną pochodną $f(\cdot A)$ w 0, w SOT, z naturalną dziedziną.

Pozbywamy się ... półgrup (!) ($e^{-t\cdot}[A] \to f(t\cdot)[A]$)

Twierdzenie (opis generatorów A)

Niech $f \in \mathcal{B}$ bedzię taką, że $f' \in \mathcal{B}$, and $f'(0) = 1$. Wówczas A jest prawostronną pochodną $f(\cdot A)$ w 0, w SOT, z naturalną dziedziną.

Przypomnijmy:

$$e^{-\cdot A} \in C((0,\infty), L(H)) \Leftrightarrow \lim_{|\beta|\to\infty} \|(\alpha + i\beta + A)^{-1}\| = 0 \text{ dla pew. } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pozbywamy się ... półgrup (!) ($e^{-t\cdot}[A] \to f(t\cdot)[A]$)

Twierdzenie (opis generatorów A)

Niech $f \in \mathcal{B}$ bedzię taką, że $f' \in \mathcal{B}$, and $f'(0) = 1$. Wówczas A jest prawostronną pochodną $f(\cdot A)$ w 0, w SOT, z naturalną dziedziną.

Przypomnijmy:

$$e^{-\cdot A} \in C((0,\infty), L(H)) \Leftrightarrow \lim_{|\beta|\to\infty} \|(\alpha + i\beta + A)^{-1}\| = 0 \text{ dla pew. } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie (natychmiastowa ciaglość normowa, ..., BGT19)

Niech $f \in \mathcal{B}$ oraz dla $\alpha > 0$ zachodzi

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \|f(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta + A)^{-1}\| = 0.$$

Wówczas $f(\cdot A) \in C((0,\infty), L(H))$. W szczeg., $f(\cdot A) \in C((0,\infty), L(H))$ jeśli

$$\lim_{|\beta|\to\infty} \|(\alpha - i\beta + A)^{-1}\| = 0.$$

Jeszcze jeden przykład ...

Twierdzenie (Gearhart-Prüss, 78-84, BGT19)

Niech $-A$ będzie generatorem ograniczonej C_0-półgrupy na pr. Hilberta H. Wówczas

$$(z+A)^{-1} \in H^\infty(\mathbb{C}_+, L(X)) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \|f(tA)\| = 0 \text{ for every } f \in \mathcal{B}_0.$$

W szczególności (Gearhart-Prüss), istnieją $M > 0$ i $\omega > 0$ takie, że

$$(z+A)^{-1} \in H^\infty(\mathbb{C}_+, L(X)) \;\Leftrightarrow\; \|e^{-tA}\| \le Me^{-\omega t}, \qquad t \ge 0.$$

Podsumowanie

$\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

- Skonstruowaliśmy nowy $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup operatorowych

Podsumowanie

$\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

- Skonstruowaliśmy nowy $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup operatorowych
- Rachunek ten posiada wszystkie naturalne własności rachunków funkcyjnych (a nawet więcej ...)

Podsumowanie

$\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

- Skonstruowaliśmy nowy $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup operatorowych
- Rachunek ten posiada wszystkie naturalne własności rachunków funkcyjnych (a nawet więcej ...)
- Ponadto pozwala on otrzymać większość znanych oszacowań funkcji generatorów półgrup w sposób bezpośredni i jednolity, oraz prowadzi do wielu nowych oszacowań

Podsumowanie

$\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta\in\mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

- Skonstruowaliśmy nowy $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup operatorowych
- Rachunek ten posiada wszystkie naturalne własności rachunków funkcyjnych (a nawet więcej ...)
- Ponadto pozwala on otrzymać większość znanych oszacowań funkcji generatorów półgrup w sposób bezpośredni i jednolity, oraz prowadzi do wielu nowych oszacowań
- $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny jest optymalny w kilku sensach naturalnych

Podsumowanie

$\mathcal{B}$ jest pr. funkcji holomorficznych f w $\mathbb{C}_+$ takich, że

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} := \int_0^\infty \sup_{\beta \in \mathbb{R}} |f'(\alpha + i\beta)|\, d\alpha < \infty.$$

- Skonstruowaliśmy nowy $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny dla generatorów półgrup operatorowych
- Rachunek ten posiada wszystkie naturalne własności rachunków funkcyjnych (a nawet więcej ...)
- Ponadto pozwala on otrzymać większość znanych oszacowań funkcji generatorów półgrup w sposób bezpośredni i jednolity, oraz prowadzi do wielu nowych oszacowań
- $\mathcal{B}$-rachunek funkcyjny jest optymalny w kilku sensach naturalnych

DZIĘKUJĘ PAŃSTWU ZA CIERPLIWOŚĆ/WYTRZYMALOŚĆ !