Koszty i zyski w przesyłaniu informacji w małych sieciach biologicznych

Paulina Szymańska, Dario Villamaina,
Aleksandra Walczak

Co nazywamy małą siecią biologiczną?

Co nazywamy małą siecią biologiczną?

Input reguluje output,
bez sprzężenia

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ (-,-) & \underset{u}{\overset{u}{\rightleftarrows}} & (-,+) \\ r\uparrow\downarrow s & & s\uparrow\downarrow r \\ (+,-) & \underset{u}{\overset{u}{\rightleftarrows}} & (+,+) \\ 3 & & 4 \end{array}$$

Co nazywamy małą siecią biologiczną?

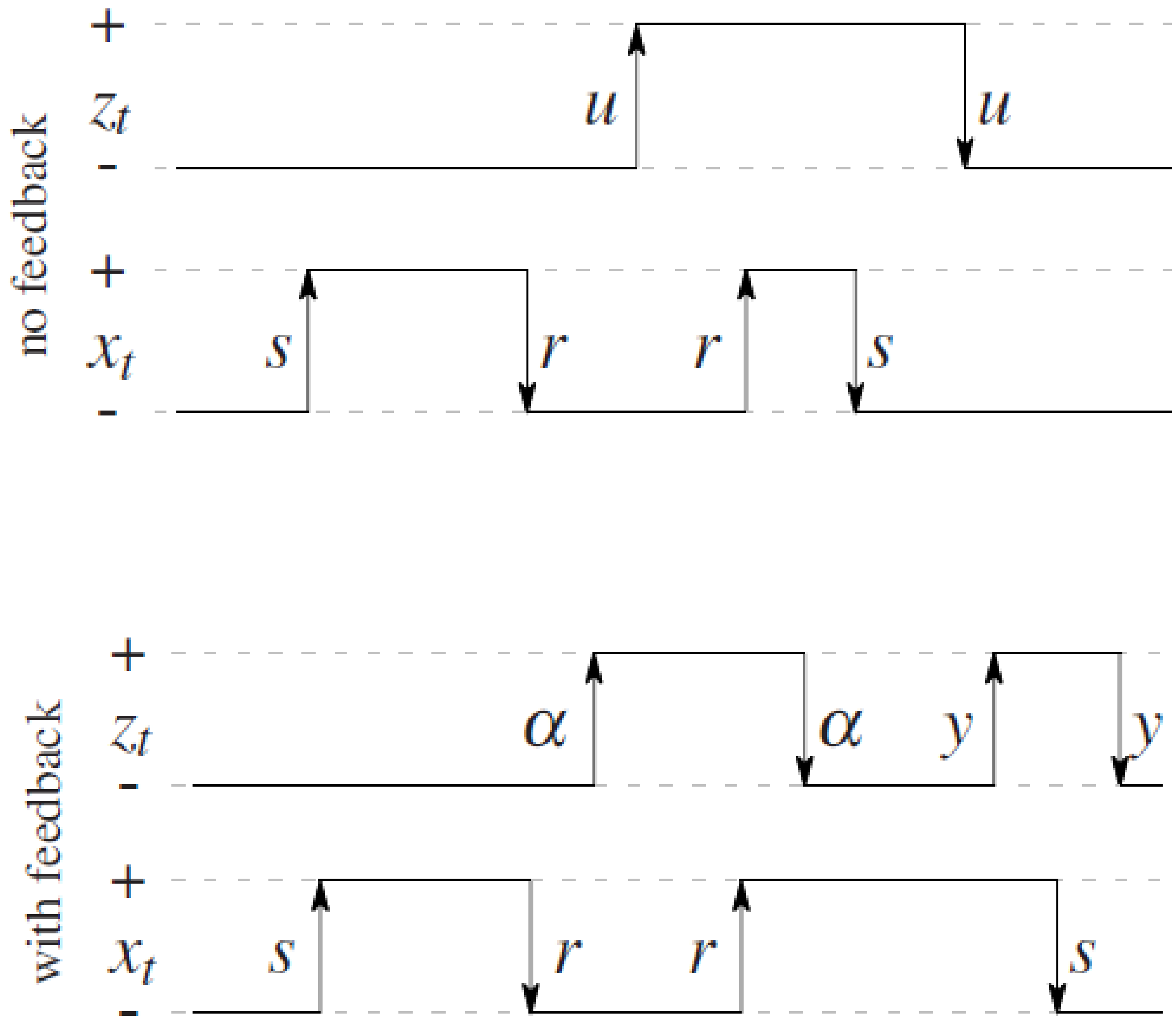
Input reguluje output, bez sprzężenia

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ (-,-) & \underset{u}{\overset{u}{\rightleftarrows}} & (-,+) \\ r\uparrow\downarrow s & & s\uparrow\downarrow r \\ (+,-) & \underset{u}{\overset{u}{\rightleftarrows}} & (+,+) \\ 3 & & 4 \end{array}$$

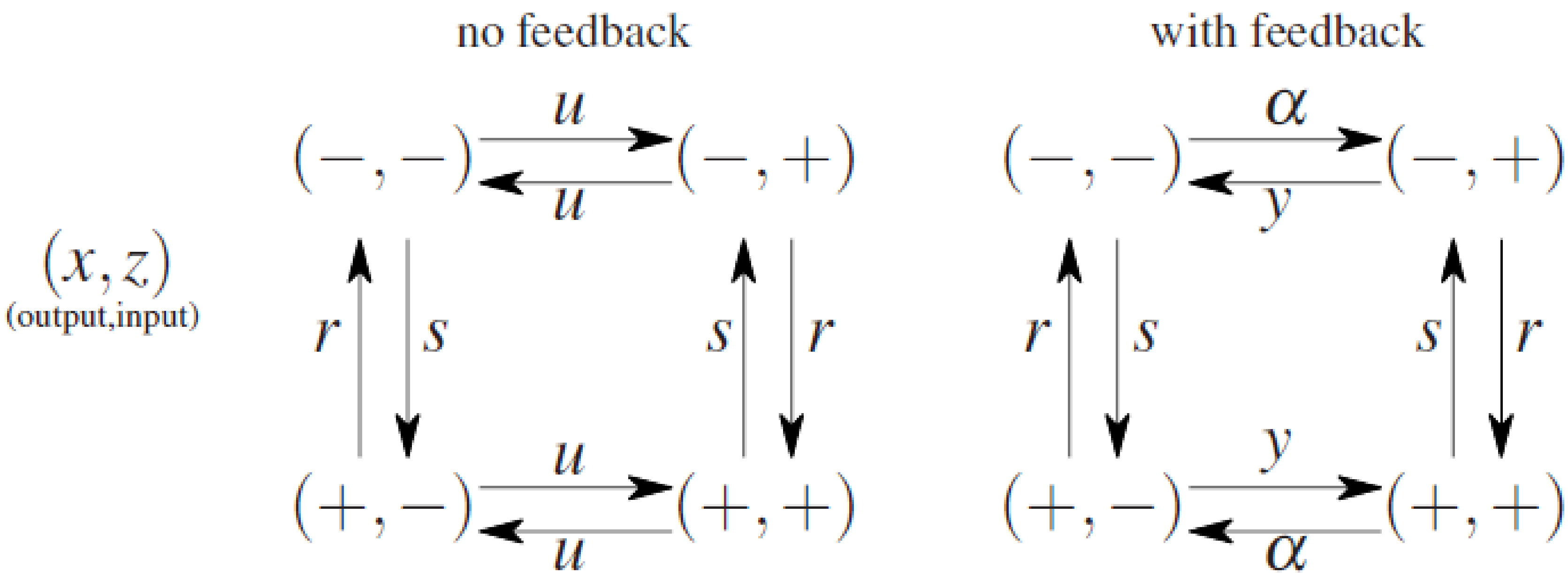
Input reguluje output, output reguluje input

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ (-,-) & \underset{y}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} & (-,+) \\ r\uparrow\downarrow s & & s\uparrow\downarrow r \\ (+,-) & \underset{\alpha}{\overset{y}{\rightleftarrows}} & (+,+) \\ 3 & & 4 \end{array}$$

Co nazywamy małą siecią biologiczną?



Co nazywamy małą siecią biologiczną?



Co nazywamy zyskiem?

$$I[X_t, Z_0] = \sum_{x_t, z_0} p(x_t, z_0) \log \frac{p(x_t, z_0)}{p(x_t)p(z_0)}$$

Co nazywamy zyskiem?

$$I[X_t, Z_0] = \sum_{x_t, z_0} p(x_t, z_0) \log \frac{p(x_t, z_0)}{p(x_t)p(z_0)}$$

$$p(x_t, z_t | x_0, z_0) = \sum_{i=1}^{4} e^{-\lambda_i t} u_i^{\mathrm{T}}(x_0, z_0) v_i(x_t, z_t)$$

Co nazywamy zyskiem?

$$I[X_t, Z_0] = \sum_{x_t, z_0} p(x_t, z_0) \log \frac{p(x_t, z_0)}{p(x_t)p(z_0)}$$

$$p(x_t, z_t | x_0, z_0) = \sum_{i=1}^{4} e^{-\lambda_i t} u_i^{\mathrm{T}}(x_0, z_0) v_i(x_t, z_t)$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} u+s & -u & -r & 0 \\ -u & u+r & 0 & -s \\ -s & 0 & u+r & -u \\ 0 & -r & -u & u+s \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} p = -\mathcal{L} p$$

Czy mamy jakieś ograniczenia?

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

$$S(t) = -\sum_i p_i(t) \log p_i(t)$$

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

$$S(t) = -\sum_i p_i(t) \log p_i(t)$$

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t)}{p_j(t)} + \frac{1}{2}\sum_{j,i} p_j(t) w_{ji} \log \frac{p_j(t)}{p_i(t)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t)}{p_j(t)} - \frac{1}{2}\sum_{j,i} p_j(t) w_{ji} \log \frac{p_i(t)}{p_j(t)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left(p_i(t) w_{ij} - p_j(t) w_{ji}\right) \log \frac{p_i(t)}{p_j(t)} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \left(p_i(t) w_{ij} - p_j(t) w_{ji}\right) \log \frac{w_{ji}}{w_{ij}}}_{\textit{entropy flow}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \left(p_i(t) w_{ij} - p_j(t) w_{ji}\right) \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}}_{\textit{entropy production rate}}
\end{aligned}$$

Czy mamy jakieś ograniczenia?

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

Czy mamy jakieś ograniczenia?

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}} \\ &= \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{w_{ij}}{w_{ji}} + \underbrace{\sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t)}{p_j(t)}}_{\dot{S}(t)} \quad \xrightarrow[t\to\infty]{} \quad \sum_{i,j} p_i^{\infty} w_{ij} \log \frac{w_{ij}}{w_{ji}} = \sigma^{\mathrm{st}}\end{aligned}$$

Czy mamy jakieś ograniczenia?

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}} \\ &= \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{w_{ij}}{w_{ji}} + \underbrace{\sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t)}{p_j(t)}}_{\dot{S}(t)} \quad \xrightarrow[t\to\infty]{} \quad \sum_{i,j} p_i^{\infty} w_{ij} \log \frac{w_{ij}}{w_{ji}} = \sigma^{\mathrm{st}}\end{aligned}$$

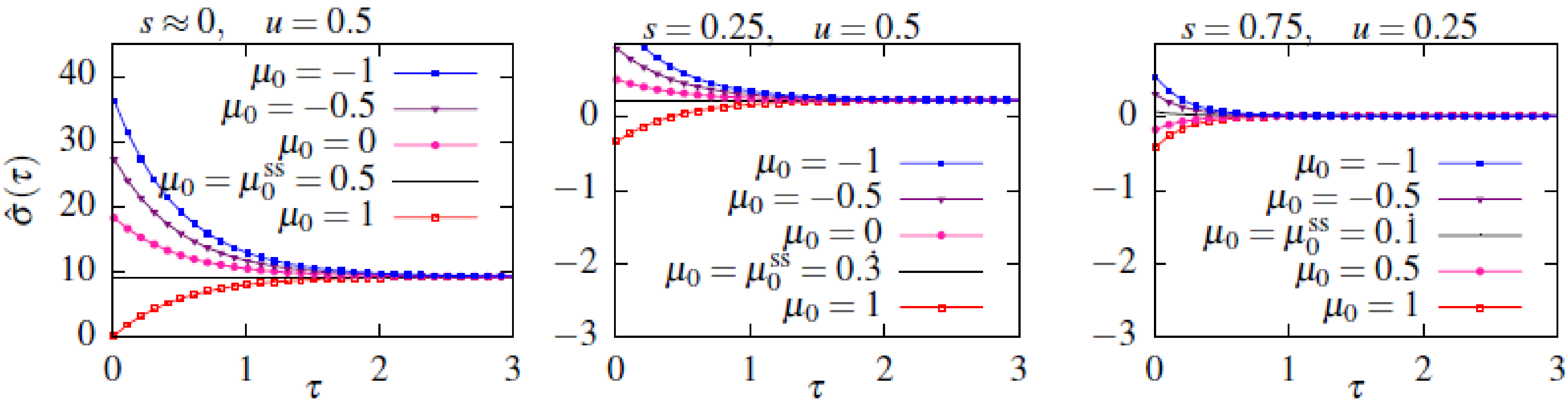
$$\sum_{i,j} p_i^{\mathrm{ss}} w_{ij} \log \frac{w_{ij}}{w_{ji}}$$

Jaki koszt ponosimy?

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

Jaki koszt ponosimy?

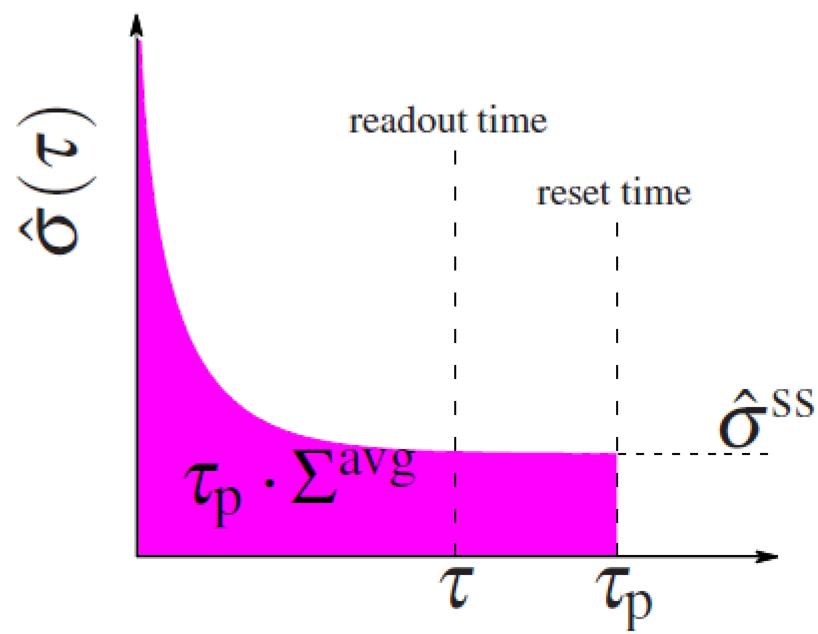
$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$



Jaki koszt ponosimy?

$$\sigma(t) = \sum_{i,j} p_i(t) w_{ij} \log \frac{p_i(t) w_{ij}}{p_j(t) w_{ji}}$$

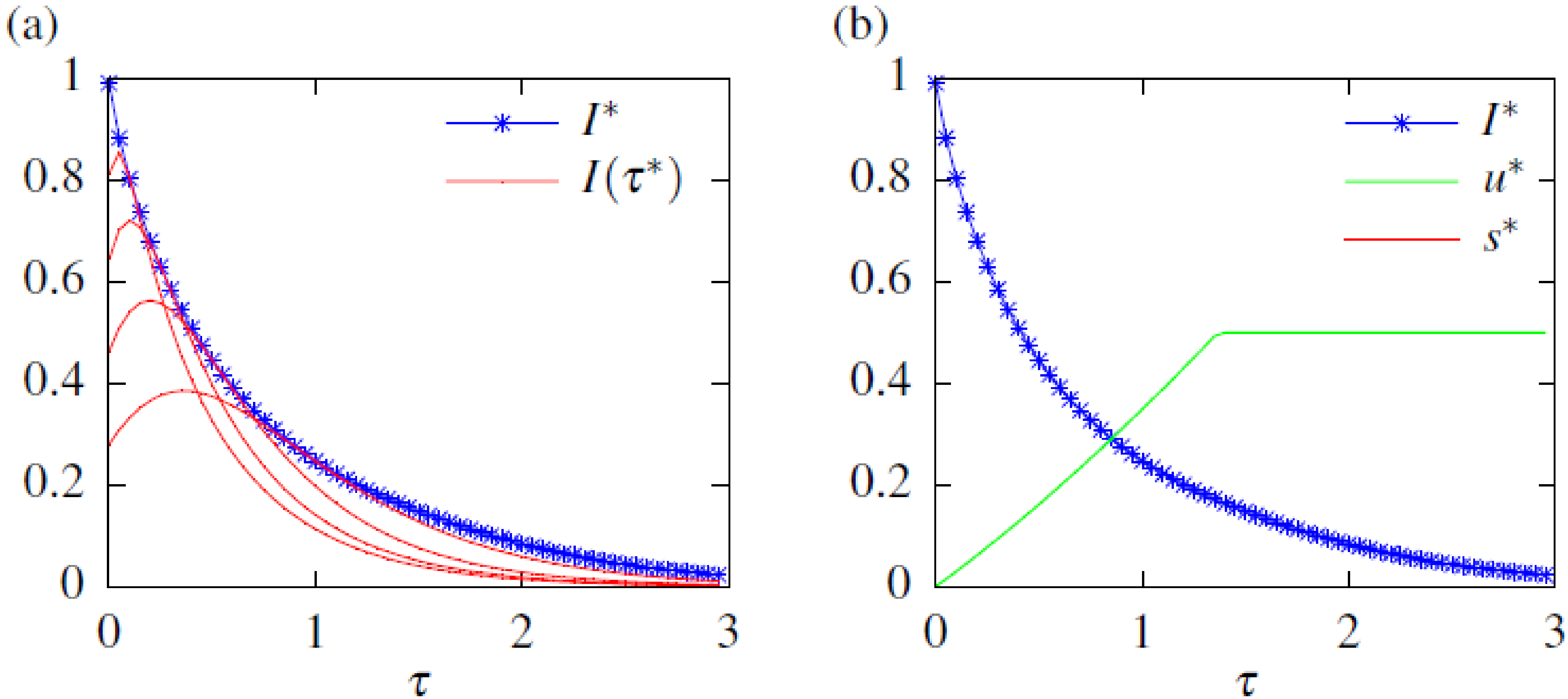
$$\Sigma^{\mathrm{avg}}(\tau_p) = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} \hat{\sigma}(\tau) d\tau$$



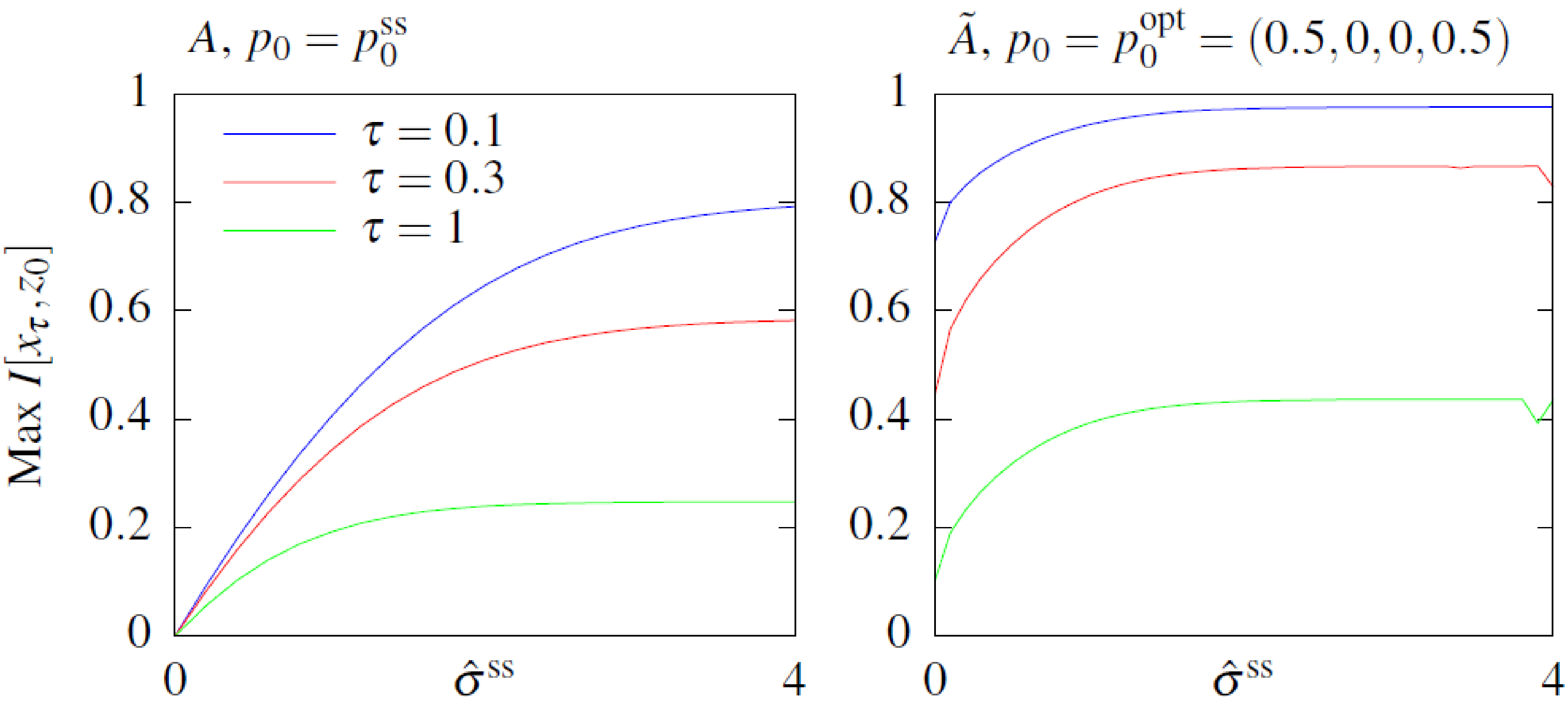
Zadania:

- Szukamy optymalnej informacji dla obu modeli.
- Najpierw rozwiązujemy prostszy problem, gdy nie ma ograniczenia na sigmę
- Znajdujemy optymalne parametry
- Rozróżniamy podmodele, w których stan początkowy jest ustalony (równy stacjonarnemu) i takie, w których optymalizujemy też po stanie początkowym
- Liczymy koszt „przesłania” optymalnej informacji

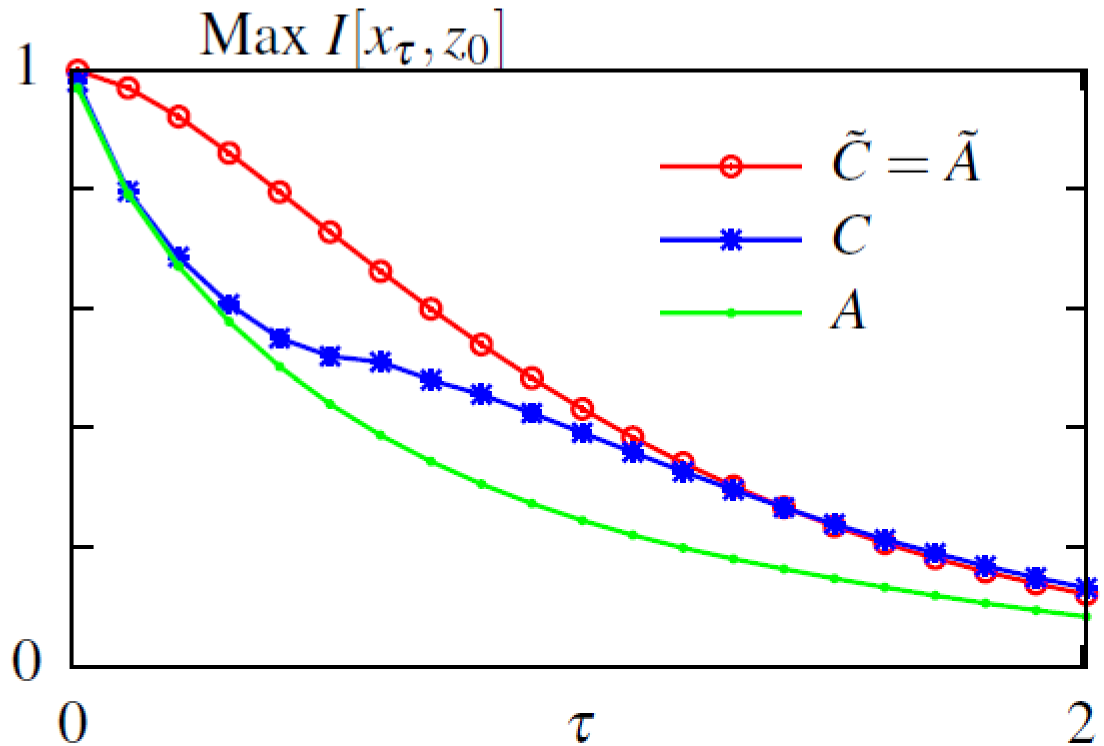
Przykład – model prosty (bez sprzężenia), bez ograniczeń energetycznych, start ze stanu stacjonarnego



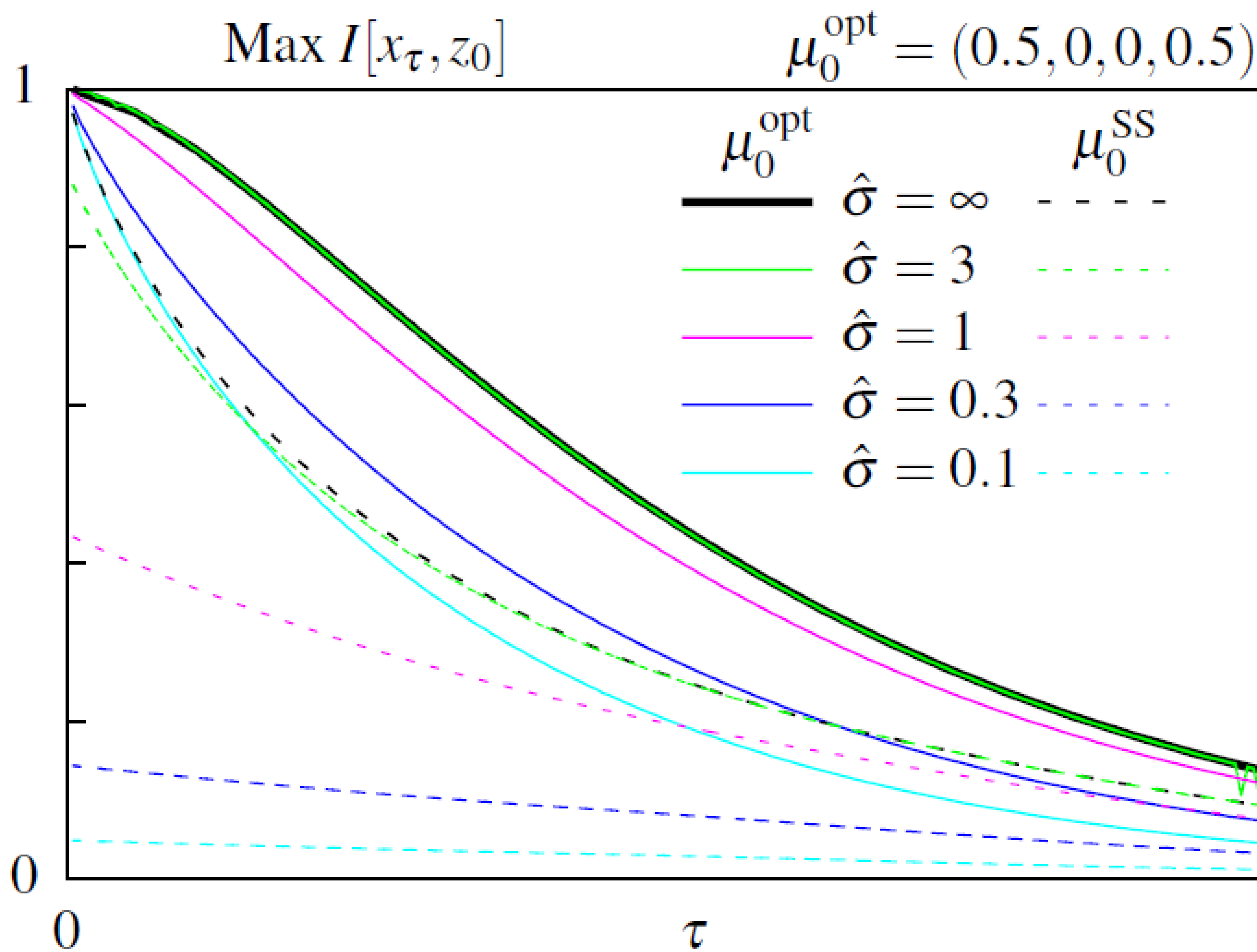
Porównanie modeli ze stacjonarnym i z optymalizowanym war. początkowym (model bez sprzężenia i bez ograniczeń energetycznych)



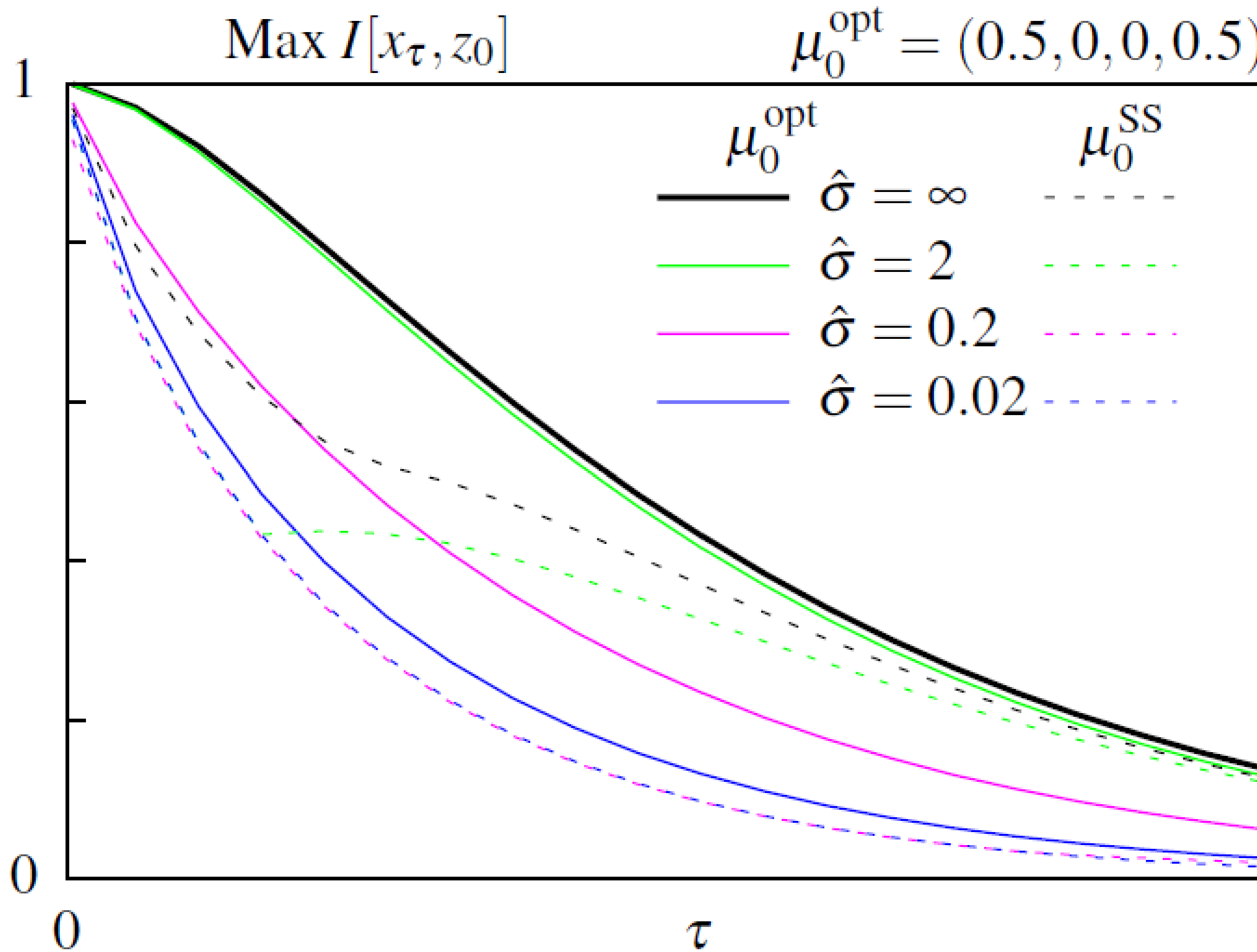
Porównanie modeli ze stacjonarnym i z optymalizowanym war. początkowym, bez i z sprzężeniem (bez ograniczeń energetycznych)



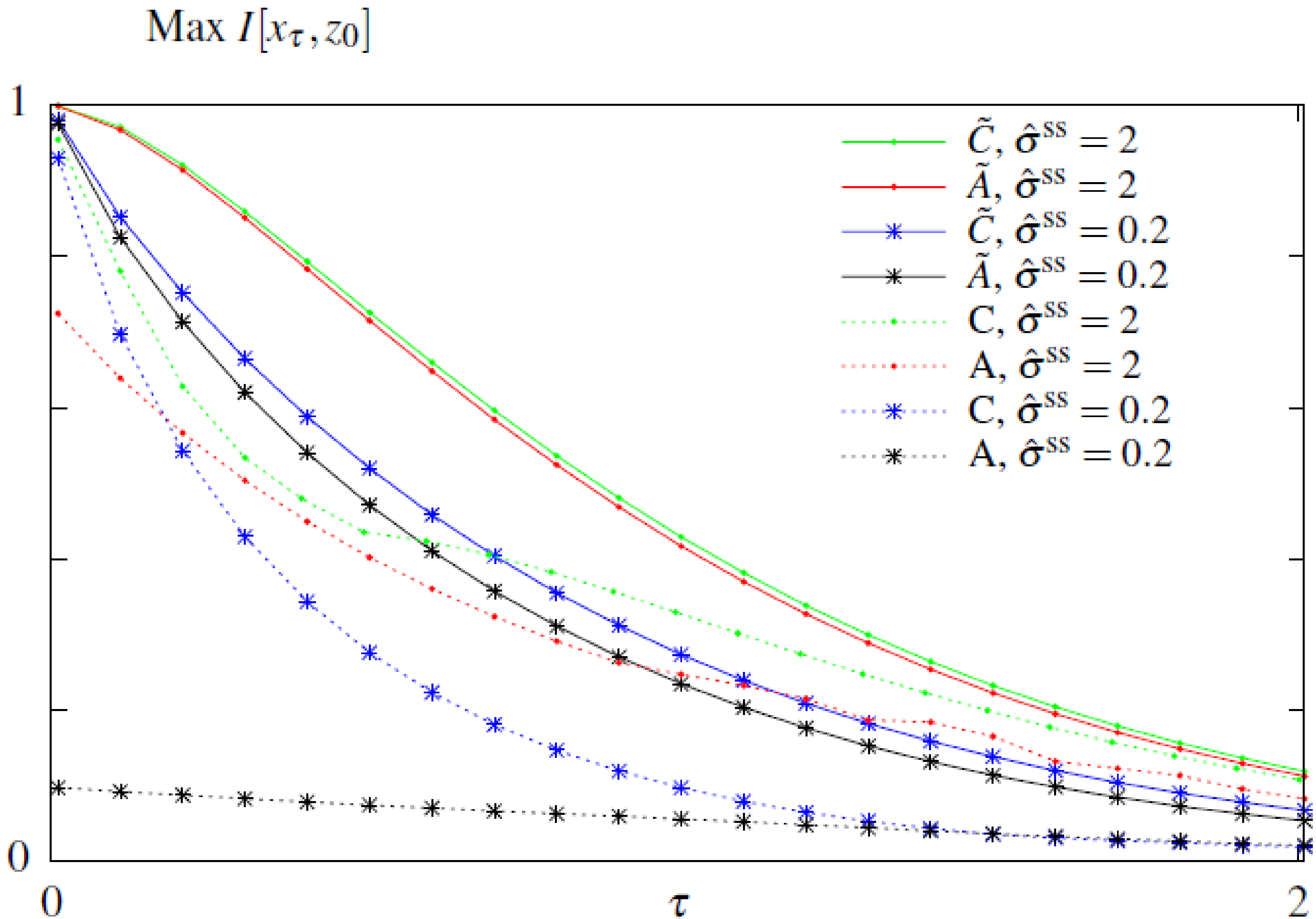
Model bez sprzężenia



Model ze sprzężeniem



Porównanie



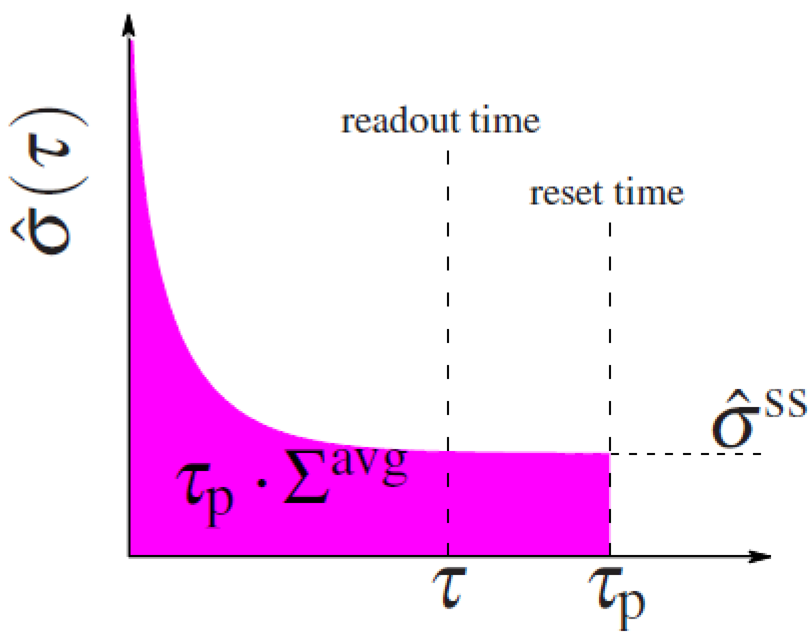
Max $I[x_\tau, z_0]$
1
0
0
τ
2
$\tilde{C}, \hat{\sigma}^{ss} = 2$
$\tilde{A}, \hat{\sigma}^{ss} = 2$
$\tilde{C}, \hat{\sigma}^{ss} = 0.2$
$\tilde{A}, \hat{\sigma}^{ss} = 0.2$
$C, \hat{\sigma}^{ss} = 2$
$A, \hat{\sigma}^{ss} = 2$
$C, \hat{\sigma}^{ss} = 0.2$
$A, \hat{\sigma}^{ss} = 0.2$

Wnioski so far

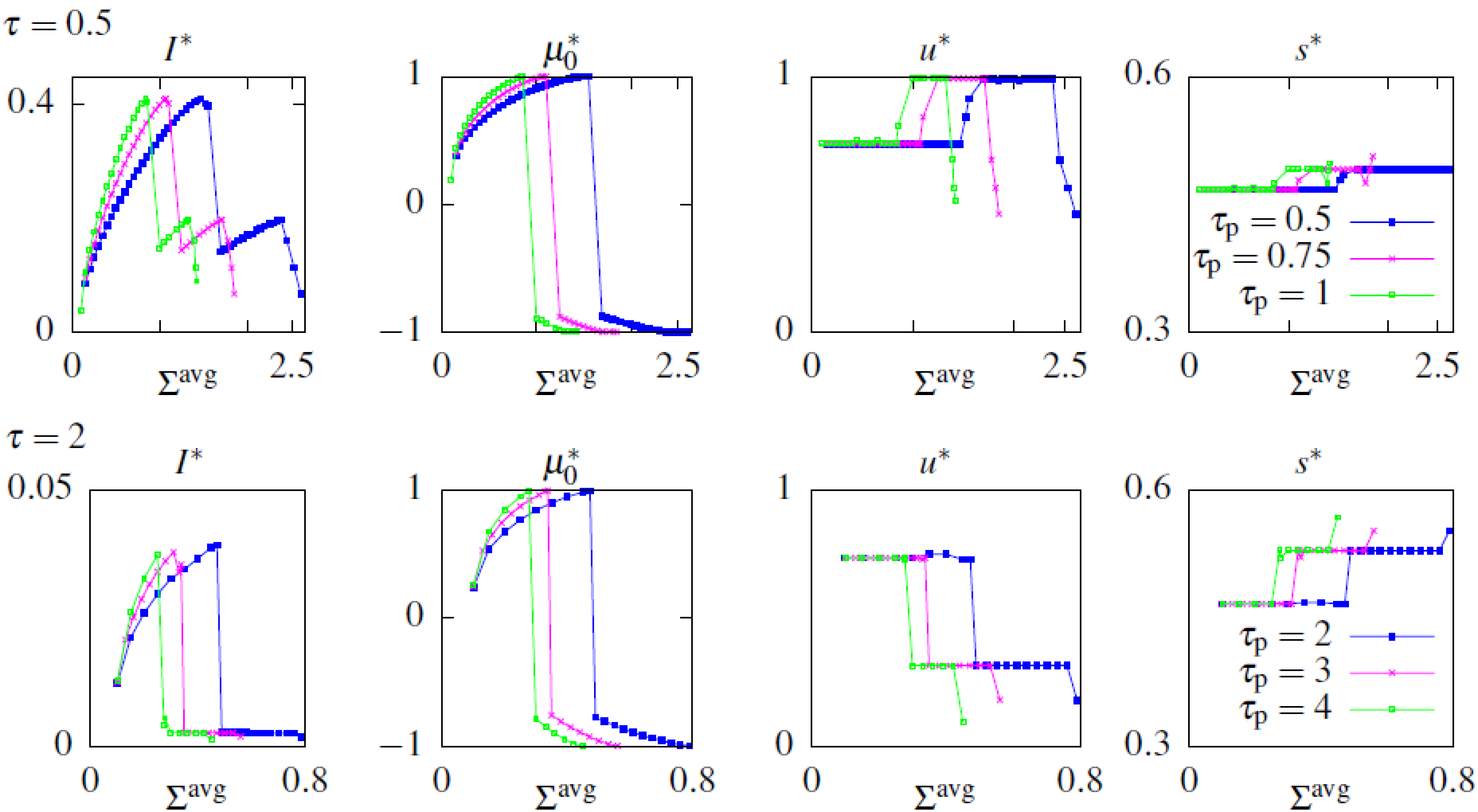
- $I(A) < I(\tilde{A}), \quad I(C) < I(\tilde{C}) \quad \forall \hat{\sigma}^{\mathrm{ss}} \leq \infty,$
- $I(A) < I(C) \quad \forall \hat{\sigma}^{\mathrm{ss}} \leq \infty,$
- $I(\tilde{A}) < I(\tilde{C}) \quad \forall \hat{\sigma}^{\mathrm{ss}} < \infty, \qquad I(\tilde{A}) \xrightarrow[\hat{\sigma}^{\mathrm{ss}} \to \infty]{} I(\tilde{C}).$

Koszt

$$\Sigma^{\text{avg}}(\tau_p) = \frac{1}{\tau_p}\int_0^{\tau_p} \hat{\sigma}(\tau)d\tau.$$

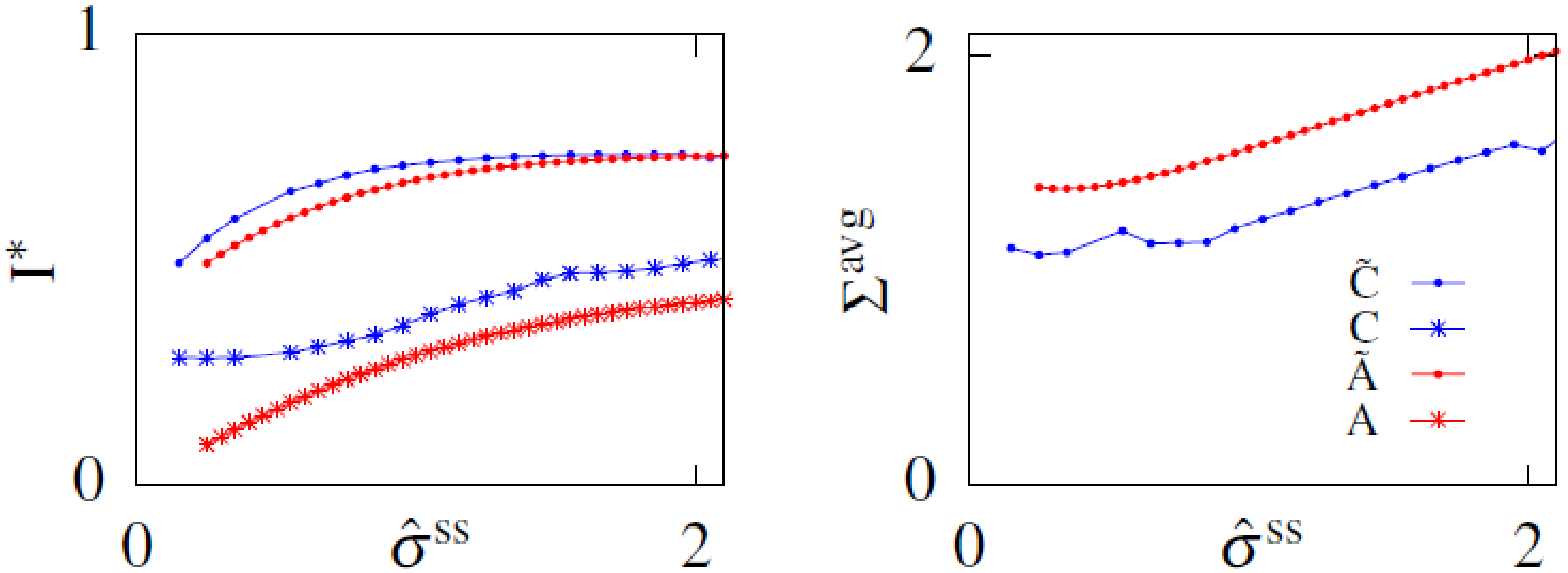


Koszt



$\tau = 0.5$
I^*
μ_0^*
u^*
s^*
$\tau_p = 0.5$
$\tau_p = 0.75$
$\tau_p = 1$
Σ^{avg}
$\tau = 2$
$\tau_p = 2$
$\tau_p = 3$
$\tau_p = 4$

Porównanie zysku i kosztu



Porównanie zysku i kosztu

	I^{opt}	Expense
A, C	$I(A) < I(C)$	$E(A) = E(C)$
$\tilde{A}, \tilde{C}$	$I(\tilde{A}) \leq I(\tilde{C})$	$E(\tilde{A}) > E(\tilde{C})$

Dziękuję za uwagę

	I^{opt}	Expense
A, C	$I(A) < I(C)$	$E(A) = E(C)$
$\tilde{A}, \tilde{C}$	$I(\tilde{A}) \leq I(\tilde{C})$	$E(\tilde{A}) > E(\tilde{C})$